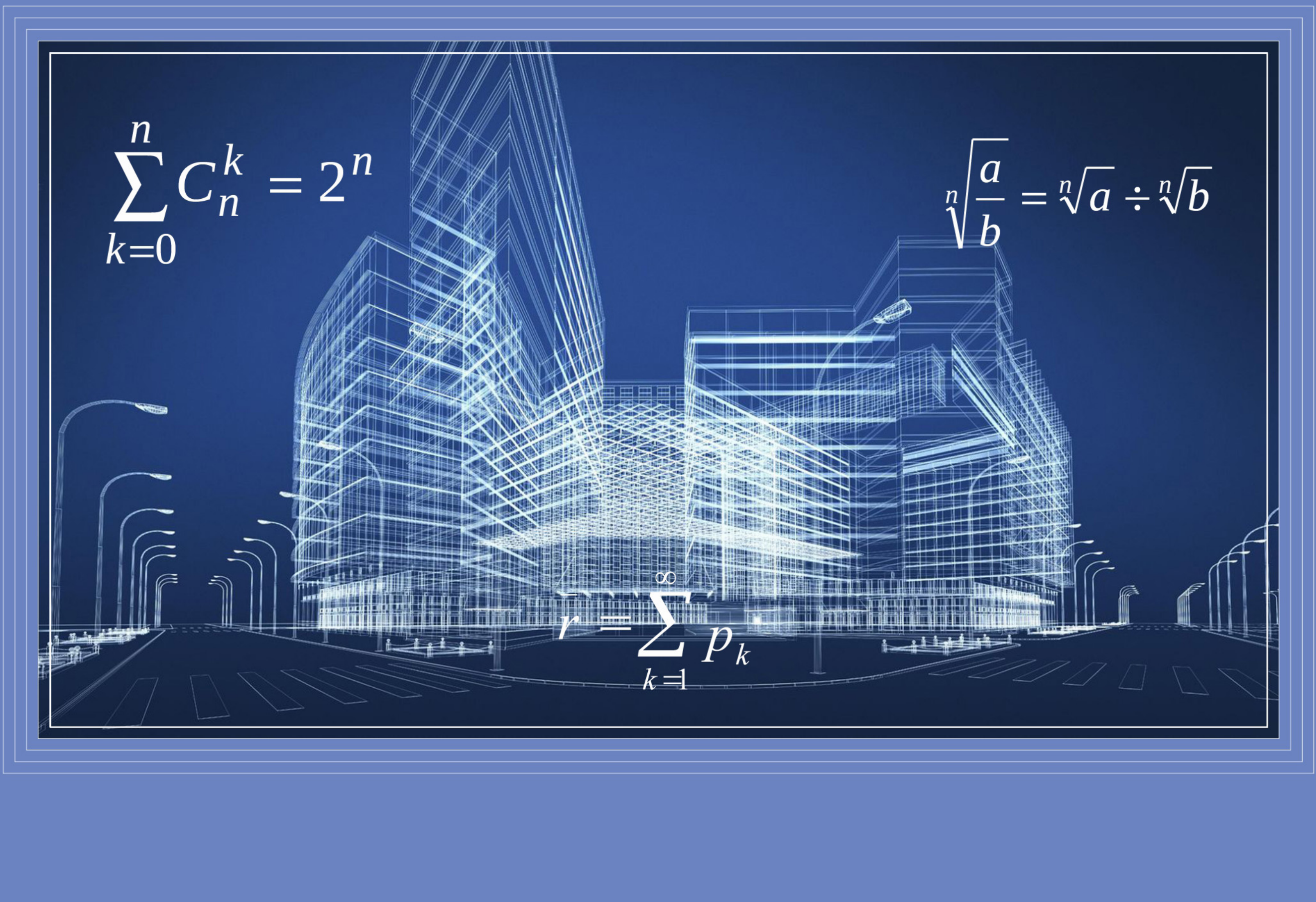
И. Г. Малышев, М. А. Мичасова

Практико-ориентированные задания в школьном курсе математики



Учебно-методическое пособие

Государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»
Кафедра теории и методики обучения математике

И. Г. Малышев, М. А. Мичасова

Практико-ориентированные задания в школьном курсе математики

Учебно-методическое пособие

Нижний Новгород
Нижегородский институт развития образования
2018

УДК 372.851
ББК 74.262.21-266
М20

Авторы

И. Г. Малышев, канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО;

М. А. Мичасова, канд. пед. наук, доцент кафедры теории и методики обучения математике ГБОУ ДПО НИРО

Рецензенты

Д. Т. Чекмарев, докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики института ИТММ ННГУ имени Н. И. Лобачевского;

О. В. Королева, учитель математики МБОУ «Школа № 174» Н. Новгорода

Рекомендовано к изданию научно-методическим экспертным советом ГБОУ ДПО НИРО

Малышев, И. Г.

М20 Практико-ориентированные задания в школьном курсе математики : учебно-методическое пособие / И. Г. Малышев, М. А. Мичасова. — Н. Новгород : Нижегородский институт развития образования, 2018. — 59 с.

ISBN 978-5-7565-0754-6

Предлагаемое пособие содержит теоретические и дидактические материалы по практико-ориентированным заданиям в основной и старшей школе. Его можно использовать и как дополнительный материал к учебнику, и как введение в данную тему.

УДК 372.851
ББК 74.262.21-266

ISBN 978-5-7565-0754-6

Введение

Для большинства учащихся привлекательность математического образования состоит в открывающихся практических возможностях, однако преподавание математики в школе неукоснительно следует программе и утвержденным учебникам, вследствие чего в учебном процессе практика решения приближенных к жизни задач сведена к минимуму. К сожалению, даже учитель математики зачастую не знает, как на практике применяется его предмет. Кроме того, крайне негативное влияние на процесс обучения оказывает довлеющий над учебным процессом ЕГЭ, чьи требования достаточно далеки от решения реальных задач.

Само понятие прикладной задачи (производственной задачи, задачи с практическим содержанием) не имеет однозначного определения. Существует множество учебников с интересными заданиями. Тем не менее большинство авторов предлагают учащимся предельно оторванные от жизни (или тривиальные в математическом отношении) методические разработки. По-настоящему прикладные задачи должны быть напрямую связаны с реальной действительностью. Как правило, их можно найти в учебниках геометрии, что и неудивительно.

Сформулируем требования, предъявляемые к задачам с практическим содержанием:

- производственная реальность сюжета;
- практическая потребность в решении данной задачи;
- математическая содержательность;
- терминологическая ясность.

Трудно удовлетворять всем требованиям. Но даже если задача соответствует им, она, как правило, единична для данной области знания. Часто можно встретить неинтересные задачи с надуманными сюжетами на элементарные арифметические действия. Подобные дидактические формы вряд ли можно отнести к числу удачных. Особенностью прикладных задач является их неопределенность. Нужные параметры выбираются из целого списка. Кроме того, допускается использование эмпирических формул, формально неправильных. Ниже приведены примеры подобных задач.

Задача 1. На посев свеклы отвели поле в виде прямоугольника. Через некоторое время длину прямоугольника увеличили на 40 %, а ширину уменьшили на 10 %. На сколько процентов изменилась посевная площадь свеклы?

Задача совершенно неинтересная и нужна только в качестве примера упражнения на проценты. Свекла это или морковь — никого не интересует, и ее трудно отнести к практико-ориентированным задачам.

Задача 2. Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться по реке до пункта B, причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника.

Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C. И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился.

По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C, Василий немедленно помчался догонять друзей.

Найдите расстояние между пунктами B и C, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, а Василий, действительно, нигде не задерживался.

Эта задача со вступительного экзамена в МГУ в 2017 году представляет собой пример обычной задачи на движение. В то же время здесь, как для всех настоящих задач с практической направленностью, есть много неизвестных параметров, то есть в этом случае мы имеем большую степень неопределенности.

Задача 3. Имеется куча зерна пшеницы, которую нужно отправить на склад. Сколько примерно стандартных мешков потребуется для такой перевозки?

Перед нами пример правильно построенной задачи, так как для нахождения объема конуса приходится пользоваться не привычными высотой и радиусом. Задача вполне реальная и может возникнуть при работе на зерновом току.

Ниже будут даны наборы тематически связанных между собой задач с практическим содержанием для различных классов.

Глава I

Конструирование уроков изучения нового, уроков-практикумов и уроков повторения и обобщения с использованием задач с практическим содержанием

§ 1. Урок изучения нового

Новые знания включают в себя не только информационный компонент, который явно отражен в учебнике, но и методологические знания, а также определенные познавательные средства. Наряду с формулировкой определений или описанием понятий, теорем и их доказательств школьник должен усваивать методы и способы их получения, осознавать, что математика в целом является методом познания реального мира.

Всякое открытие предполагает формулировку проблемы (учебной задачи), поиск ее решения и собственно решение, что требует от обучающегося опыта поисковой деятельности, необходимой базы знаний и умений, заинтересованности, интеллектуального напряжения и т. д.

Развивающее обучение всегда предполагает самостоятельную деятельность ученика. Пусковым механизмом самостоятельной познавательной деятельности на уроке математики является проблемная учебная задача, которую каждый обучающийся должен принять как лично для него значимую, могущую его заинтересовать и вызвать потребность решить ее. Уровень самостоятельности у каждого школьника будет свой, зависящий от уровня его обученности и обучаемости.

Но главное, чтобы все они были соучастниками полученного и усвоенного нового знания, осознавая свой вклад в постановку и решение учебной задачи урока. Одним из основополагающих средств для создания условий, обеспечивающих мотивацию школьника к изучению нового материала, являются практико-ориентированные задачи. Ученик в ходе их решения может применить знания и навыки из повседневной жизни, а также проверить полученный им результат на практике.

Мотивационно-ориентировочная часть урока математики содержит следующие необходимые элементы:

- актуализация;
- мотивация, проблемная ситуация;
- формулировка проблемы;
- постановка учебной задачи (цели урока).

Актуализация решает две основные подзадачи: повторение ранее изученного и создание условий для перехода к мотивации. В конце обязательна «интрига»: повторяя, решаем известные упражнения (создается «ситуация успеха»), но далее предлагается задача, желательно с практическим содержанием, решить которую ученик пока не может, но стремление справиться с ней должно остаться. Эта ситуация призвана побудить школьников к действию: поиску нового знания. Таким образом осуществляем плавный переход к следующему элементу первой части урока: мотивации.

Пример 1. На уроке изучения нового по теме «Теорема Пифагора» в 8-м классе можно предложить задачу: «Вы плывете на лодке по озеру и хотите узнать его глубину. Нельзя ли воспользоваться для этого торчащим из воды камышом, не вырывая его?»

Заметим, что это задание, аналогичное заданиям модуля «Реальная математика», описывает практическую ситуацию, знакомую учащимся и близкую их жизненному опыту. Для решения таких задач нужно в ходе анализа условия не только применить теорему, но и выделить математический объект, установить математические отношения и связи между ними, а также построить математическую модель ситуации, что достаточно сложно для восьмиклассника.

Математизация (анализ условия)

Отклонив камыш и держа его в натянутом состоянии, замерим расстояние *a* между точками А и В, в которых камыш пересекает поверхность воды соответственно в вертикальном и наклоненном положении (рис. 1 на с. 7).

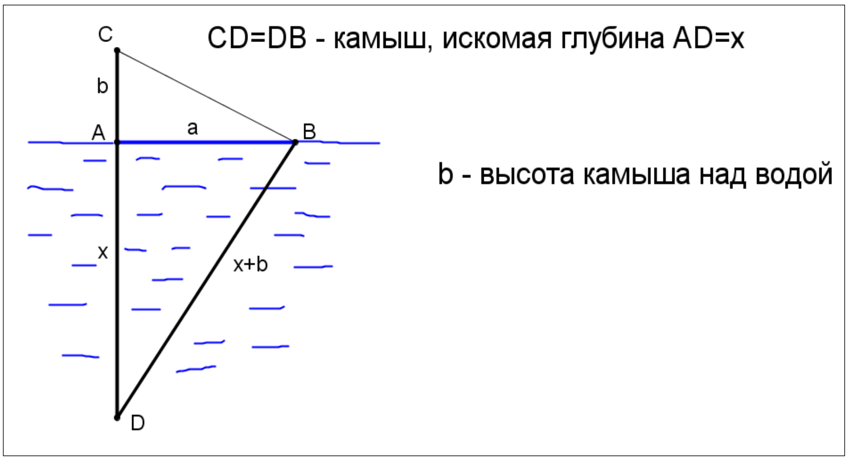


Рис. 1

Возвратим камыш в исходное состояние и определим высоту b над водой, на которую поднимется при этом точка В наклоненного камыша, заняв исходное положение в точке С.

Далее в прямоугольном треугольнике ΔABD нужно определить закономерность между катетами и гипотенузой, чтобы найти глубину озера.

Учитель предлагает ученикам сделать предположение (сформулировать цель урока): «Чем мы должны будем заниматься на сегодняшнем уроке?» Учащиеся высказывают свои соображения, учитель их корректирует и окончательно формулирует проблему (учебную задачу — цель деятельности учеников на уроке): найти способ нахождения одной стороны прямоугольного треугольника по двум другим сторонам.

Далее, «открыв» совместно с учителем *теорему Пифагора,* класс вернется к поставленной задаче и решит ее:

$$x^2 + a^2 = (x+b)^2 \text{, откуда } 2bx = a^2 - b^2 \text{ и } x = \frac{a^2 - b^2}{2b}.$$

В дифференцированном домашнем задании можно предложить следующие задачи на выбор.

Задача 1. Стебель камыша выступает из воды озера на 1 м. Его верхний конец отклонили от вертикального положения на 2 м, и он оказался на уровне воды. Найдите глубину озера в месте, где растет камыш.

Ответ: 1,5 м.

Задача 2. Ее авторство приписывают Бхаскаре, индийскому математику и астроному (1114—1185).

Над озером тихим, с полфута высотой,
Высится лотоса цветок.
И ветер порывистый
Отнес его в сторону. Нет
Больше цветка над водой.
Нашел его рыбак
В двух футах от места, где он рос.
Итак, предлагаю вопрос:
Как глубока здесь озера вода?

Ответ: $3\frac{3}{4}$ фута.

Задача 3. Старинная арабская задача. На противоположных берегах реки растут одна напротив другой две пальмы. Высота одной из них равна 30 локтей, другой — 20 локтей, а расстояние между основаниями пальм составляет 50 локтей. На вершине каждой пальмы сидит птица. Вдруг обе птицы увидели рыбу, которая показалась на поверхности воды между пальмами. Они взлетели с пальм одновременно и, двигаясь с одинаковой скоростью, одновременно схватили рыбу. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

Ответ: 20 локтей.

Приведенный пример показывает, как учитель мотивирует школьников к получению новых знаний при решении прикладной практико-ориентированной задачи, а в предлагаемом им домашнем задании создаются условия для первичного закрепления метода решения ключевой задачи в том случае, когда стороны прямоугольного треугольника представлены в виде выражений относительно неизвестной величины. Заметим, что приемы создания мотивации у школьников весьма разнообразны. В данном случае это связь математики с действительностью.

Пример 2. По теме «Теорема Пифагора» в качестве мотивирующей задачи можно предложить следующую: «В парке при центральном входе на пустом квадратном участке со стороной 14 м решили сделать большую композицию из живых цветов в виде квадрата так, чтобы угол клумбы делил сторону участка на две неравные части — 6 м и 8 м, — но так, чтобы соответственные стороны на равных сторонах были равны. Какова площадь цветочной композиции?»

Математизация

Какие объекты реальной действительности представлены в задаче? Квадратный участок земли и квадратная клумба цветов.

С какими математическими объектами мы имеем дело? Два квадрата.

Какое отношение между предлагаемыми объектами? Один квадрат вписан в другой.

Построение математической модели

Каким образом один квадрат вписан в другой? Вершина внутреннего квадрата делит сторону внешнего в отношении 6:8 или 3:4 соответственно. Изобразим данное отношение (рис. 2).

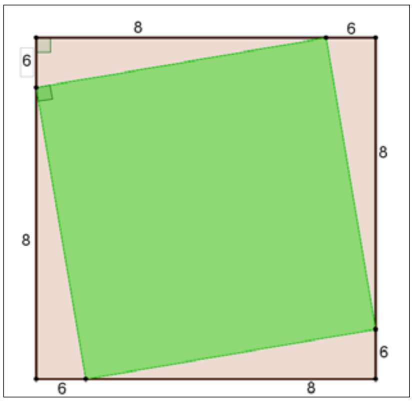


Рис. 2

Решение

Что требуется найти в задаче? Площадь малого квадрата.

Мы можем ее найти? Нет, так как нам не известна сторона квадрата.

Что нам дано? Сторона большого квадрата. Значит, мы можем найти площадь большого квадрата. Она равна $14^2 = 196$ $(м^2)$.

Из каких геометрических фигур составлен большой квадрат? Из малого квадрата и четырех равных между собой прямоугольных треугольников.

Можно ли найти сумму площадей прямоугольных треугольников?

Да, она равна $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 96$ $(м^2)$.

Тогда площадь малого квадрата будет равна 196 – 96 = 100 (м^2).

А сторона малого квадрата равна 10 м.

Обращаем внимание на прямоугольный треугольник со сторонами 6, 8, 10 м. Какова связь гипотенузы с катетами?

Имеем: $10^2 = 6^2 + 8^2$.

Далее предлагается контрольный эксперимент.

В тетрадях или на компьютере строится прямоугольный треугольник, длина катетов которого выражается целыми числами. Измеряются катеты и гипотенуза. Результаты измерений анализируются. Далее проводится аналитическое доказательство теоремы Пифагора. В конце урока при рефлексии и подведении итогов можно задать пропедевтический вопрос: «Справедлива ли обратная теорема Пифагора»? К этому вопросу следует вернуться на следующих уроках.

Эффект исследовательской деятельности может быть усилен, если дать возможность учащимся включиться в работу по выдвижению гипотез, в поиск доказательств их истинности или опровержения, а также осознавать способы, методы и приемы, с помощью которых реализуется эта деятельность.

На дом можно предложить следующее задание с использованием компьютера: «На сторонах произвольного треугольника во внешнюю часть построить квадраты и определить вид треугольника, для которого сумма площадей двух меньших квадратов является равной площади большего квадрата». Нарисовать модель. Пример на рисунке 3:

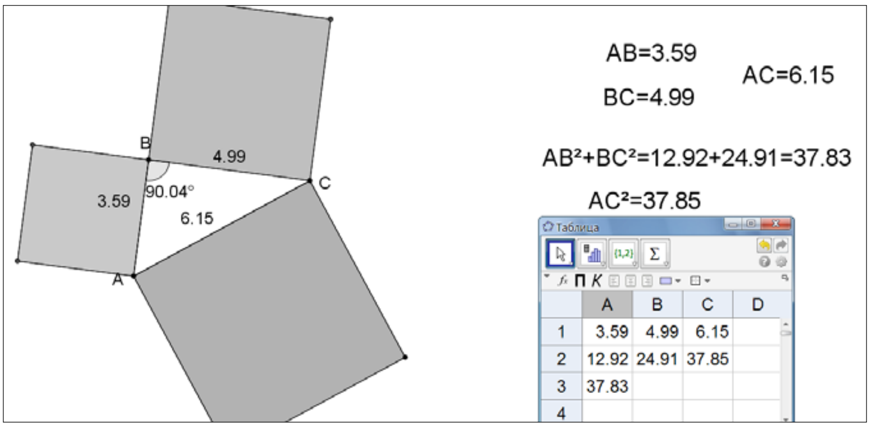


Рис. 3

Если изменять треугольник (зацепив мышкой одну из вершин), то можно проследить за изменением суммы квадратов двух сторон и сравнить ее с квадратом третьей стороны. Когда будет достигнуто равенство, треугольник станет прямоугольным.

Обсудив на следующем уроке результат эксперимента и доказав его, можно дать следующее задание: используя построенную модель, придумать и провести компьютерный эксперимент, позволяющий по соотношению площадей квадратов, построенных на сторонах треугольника, определять его вид.

Отрежем от большего из прямоугольников два равновеликих меньшим квадратам. Если менять форму треугольника, то можно проследить за изменением суммы квадратов двух меньших сторон и сравнить ее с квадратом большей стороны треугольника. Если сумма квадратов двух меньших сторон больше квадрата третьей стороны, как на рисунке 4, то треугольник, как видим (и докажем!), — тупоугольный. Трудно представить более наглядную интерпретацию следствия из теоремы косинусов!

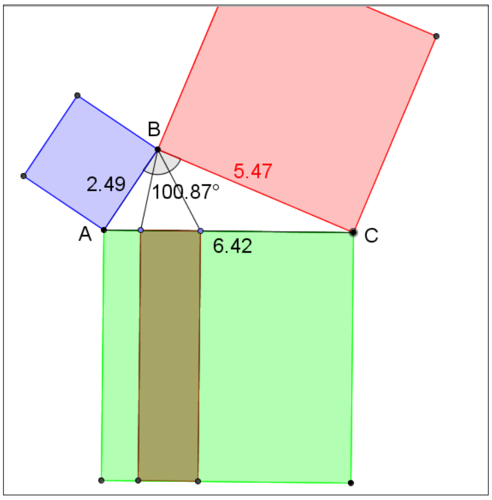


Рис. 4

Далее в следующем домашнем задании проведем исследование, может ли служить признаком вида треугольника соотношение площадей не только квадратов, построенных на его сторонах, но и любых других правильных многоугольников.

Например, построим на сторонах треугольника правильные *n*-угольники, где *n* — параметр, заданный с помощью инструмента «ползунок». После получения прямоугольного треугольника приступим к изменению параметра *n*. Эксперимент показывает, что при этом равенство площадей не исчезает (рис. 5 на с. 13).

Получаем обобщение теоремы Пифагора на случай любых правильных многоугольников, построенных вне его на сторонах прямоугольного треугольника. Дополнительно можно проверить, как изменится соотношение сумм площадей правильных *n*-угольников при изменении вида треугольника.

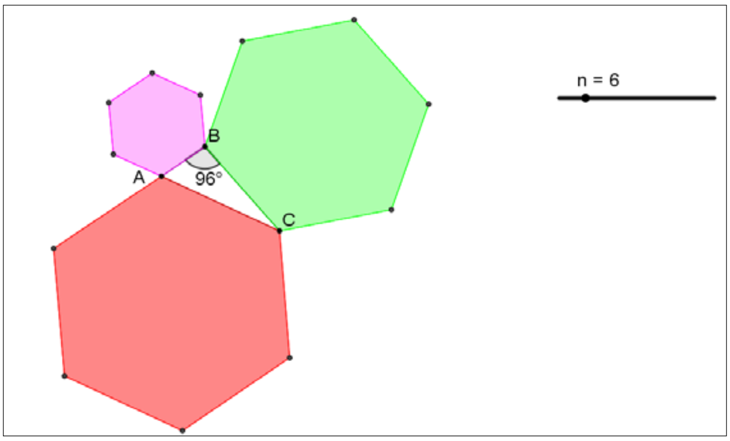


Рис. 5

Получение модификации виртуальной модели, так же как и практические задачи, позволяет выводить геометрические представления ученика и его сознание из статического состояния. «Мышлению чужда статика», — отмечает известный учитель математики из Беларусии И. С. Храповицкий, говоря о достоинстве компьютерных экспериментов.

§ 2. Конструирование уроков-практикумов с использованием задач с практическим содержанием

Перед учителем математики стоит много задач, но главное — это научить школьников преобразовывать теоретические знания в способы деятельности, аргументировать, решать дидактические, стандартные задачи, самостоятельно их составлять, обучать первым шагам в аналитико-синтетической деятельности посредством составления эвристик. Успешная организация уроков решения задач во многом зависит от предварительной подготовки преподавателя (а иногда и ученика). Учителю необходимо выявить ключевые задачи по учебному материалу и спроектировать деятельность учеников при работе над ними. На данном этапе также необходимо использовать практико-ориентированные задачи.

На уроках-практикумах существует возможность учитывать индивидуальность каждого ученика, создавать условия для раскрытия и развития его творческого потенциала. Формы организации учебной деятельности учащихся на уроке могут быть разнообразными в зависимости от специфики содержания и особенностей класса. Возможно решение некоторых задач на доске или же фронтальная работа с классом с комментированием. Можно организовать работу в группах или в парах, чтобы каждый ученик, выполнив задание, мог «проговорить» его решение соседу.

Однако более ценной представляется индивидуальная работа школьников. Слабоуспевающие ученики решают задачи вместе с учителем, а более успешные — самостоятельно, причем задания у них несколько сложнее. Возможен и вариант с консультантами. Цель одна — каждому ученику на уроке решить как можно больше задач самостоятельно.

Далее рассмотрим примеры практико-ориентированных упражнений по теме «Теорема Пифагора».

1-й уровень

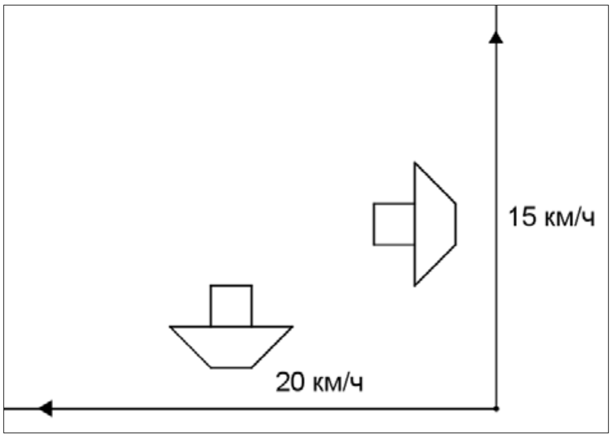


Рис. 6

Задача 1. Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад (рис. 6). Скорости их равны 15 км/ч и 20 км/ч соответственно. Какое расстояние (в км) будет между ними через 2 ч?

Ответ: 50 км.

Задача 2. В 60 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 31 м, а другой — 6 м. Найдите расстояние (в метрах) между их верхушками.

Ответ: 65 м.

Задача 3. На каком расстоянии от стены нужно закрепить нижний конец лестницы, чтобы ее верхний конец доставал до карниза дома на высоте 6 м, если длина лестницы 6,5 м? Ответ запишите в метрах.

Ответ: 2,5 м.

2-й уровень

Задача 1. В цирке к вершинам двух мачт привязан трос. Когда канатоходец дошел до середины троса, его натяжение ослабили так, что трос опустился до арены. На каком расстоянии от мачты высотой 6 м канатоходец коснулся арены, если высота второй мачты 4 м, а расстояние между ними 10 м (рис. 7)? Ответ запишите в метрах.

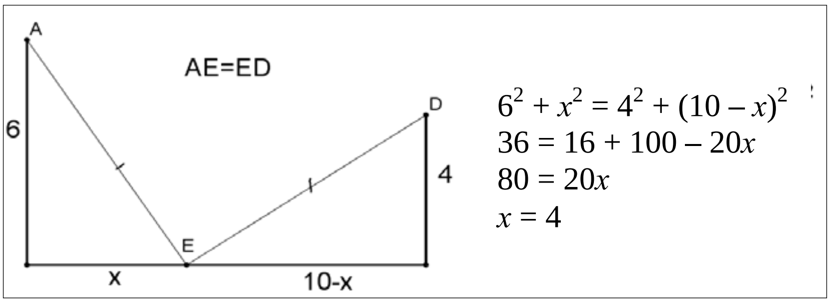


Рис. 7

Ответ: 4 м.

Задача 2. Туннель имеет форму полукруга радиусом 3 м. Какой наибольшей высоты должна быть машина шириной 2 м, чтобы она могла проехать по этому туннелю? В ответе укажите приближенное значение в метрах с точностью до одного знака после запятой.

Решение

Наибольшая высота машины равна катету AB прямоугольного треугольника OAB, где O — центр круга. Она равна $2\sqrt{2}$ м. Ее приближенное значение равно 2,8 м (рис. 8).

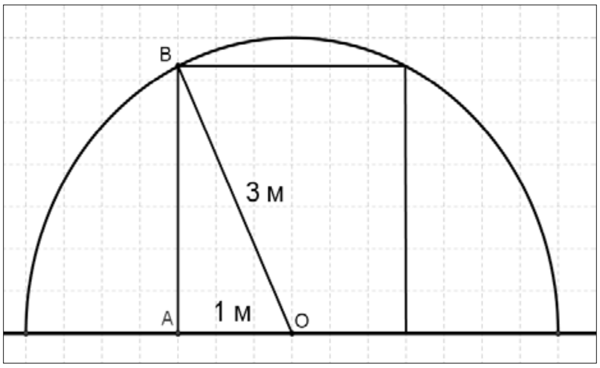


Рис. 8

Задача 3. Взята из древнекитайского трактата «Математика в 9 книгах». Имеется квадратный водоем со стороной 1 чжан. В центре его растет камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то растение коснется его. Спрашивается: какова глубина водоема и какова длина камыша? (Чжан и чи — меры длины, 1 чжан = 10 чи.)

Ответ: глубина водоема — 12 чи, длина камыша — 13 чи.

Задача 4. Лестница соединяет точки A и B и состоит из 50 ступеней. Высота каждой ступени равна 15 см, а длина — 36 см. Найдите расстояние между точками A и B (в метрах).

Ответ: 19,5 м.

3-й уровень

Задача 1. Скорость гребца, плывущего поперек реки, — 3 км/ч, а скорость течения реки — 4 км/ч. Гребец плыл на другой берег 40 минут. Какое расстояние он преодолел? С какой скоростью передвигался?

Задача 2. А этой задаче 4000 лет — ее решали еще в Вавилоне. Шест длиной $\frac{1}{2}$ прислонен к стене. Его верхний конец опустили на $\frac{1}{10}$. Как далеко отодвинется нижний конец шеста?

Задача 3. Задан отрезок a. Придумайте способ построения циркулем и линейкой отрезка $\sqrt{n}\cdot a$, где n — натуральное число, например $n = 11$.

Задача 4. В одном углу комнаты с размерами $4\times5\times3$ м сидит муха. В противоположном углу — паук (рис. 9). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности комнаты, по которому паук может доползти до мухи. В ответе укажите приближенное значение в метрах с точностью до одного знака после запятой.

Р е ш е н и е

Искомый кратчайший путь равен диагонали прямоугольника со сторонами 9 м и 3 м, то есть равен $\sqrt{90}$ м. Приближенное значение равно 9,4 м (рис. 10).

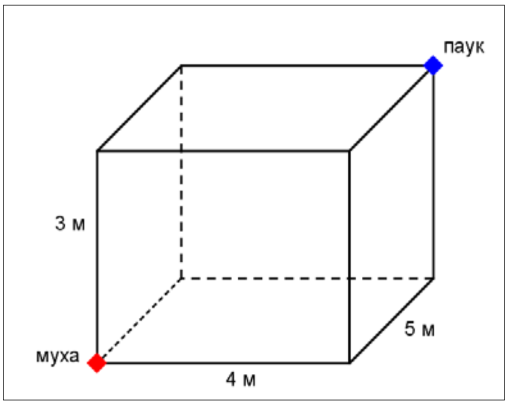


Рис. 9

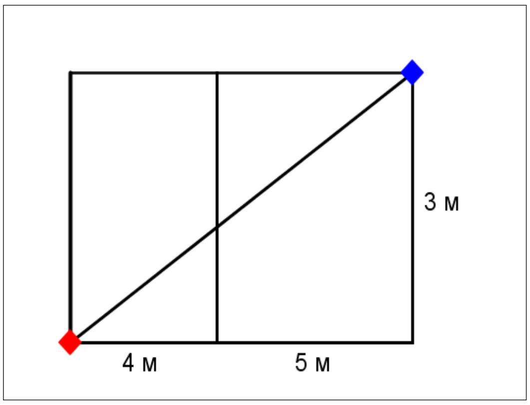


Рис. 10

На дом школьникам можно предложить **лабораторные работы**:

1. Вы хотите проверить, перпендикулярны ли друг другу соседние стороны в вашей комнате. Как воспользоваться для этого теоремой Пифагора?

Р е ш е н и е

Будем предполагать, что стены в комнате вертикальны, а пол горизонтален. Отложим по нижнему краю стен от точки А, лежащей на линии их пересечения, отрезки АВ и АС длиной 3 и 4 произвольных единицы, например дециметра. Тогда угол ВАС, представляющий собой линейный угол двугранного угла между стенами, будет прямым тогда и только тогда, когда длина отрезка ВС равна 5 единицам (рис. 11).

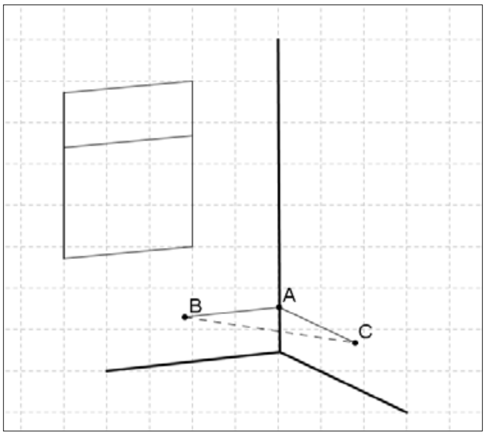


Рис. 11

2. Во время ремонта требуется соединить стенной проводкой выключатель и лампочку в спортивном зале школы длиной 30 м, а шириной и высотой по 12 м. Выключатель находится посреди торцевой стены на высоте 1 м от пола, а лампочка находится посреди противоположной стены на расстоянии 1 м от потолка (рис. 12). По какому кратчайшему пути должна проходить проводка?

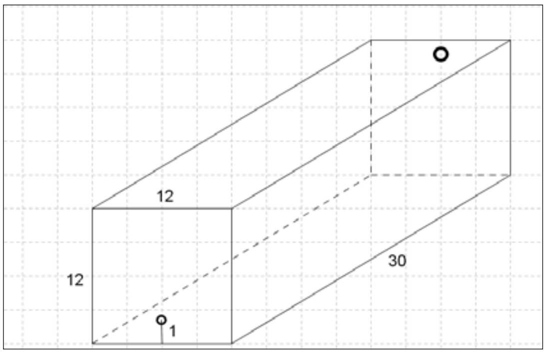


Рис. 12

О т в е т: кратчайший путь равен 40 м.

Индивидуальное домашнее задание может быть связано с детской игрой оригами и математикой листа бумаги (оригамикой). Оригамика (складывание квадратного листа бумаги) очень помогает при изучении геометрии. Складывание бумаги — такой же геометрический инструмент построений, как циркуль и линейка.

Предложите сделать небольшую отметку в середине верхней стороны бумажного квадрата. Затем совместите нижнюю правую вершину с нанесенной отметкой и сделайте складку. Таким образом, получается несимметричный сгиб и возникает ряд интересных наблюдений, связанных с получившимися треугольниками.

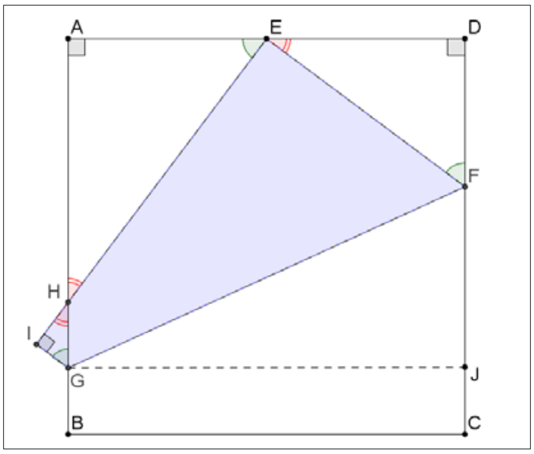


Рис. 13

Предложите рассмотреть получившиеся прямоугольные треугольники ΔEDF, ΔAHE, ΔIHG (рис. 13).

Будем считать, что длина стороны квадрата равна 1. Теперь мы можем найти длины сторон прямоугольного треугольника EDF (рис. 14).

Пусть $DF = a$. Тогда $FC = 1 - a$. По построению $FE = FC$, поэтому $FE = 1 - a$. Так как E является серединой стороны,

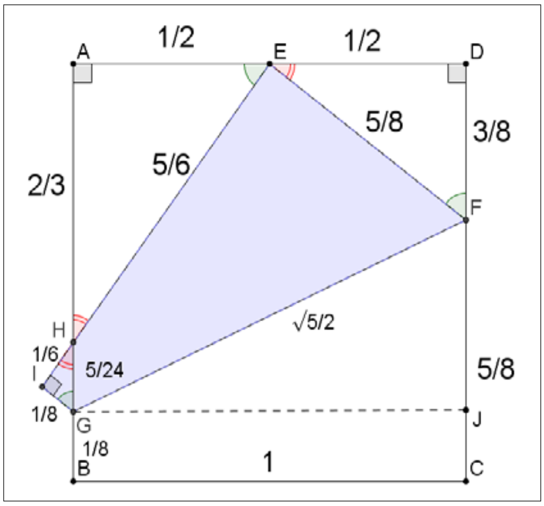


Рис. 14

$$DE = \frac{1}{2}.$$

По теореме Пифагора: $(1-a)^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Отсюда получаем: $a = \frac{3}{8}$.

Следовательно, $DF = \frac{3}{8}$ и $FE = 1 - a = \frac{5}{8}$.

Другими словами, такая процедура делит правую сторону квадрата в отношении 3:5.

Далее отношение сторон в ΔEDF равно $FD \div DE \div DF = \frac{3}{8} \div \frac{1}{2} \div \frac{5}{8} = 3 \div 4 \div 5$.

Оказывается, ΔEDF — египетский треугольник. Такие треугольники использовали в древности египтяне для восстановления границ земельных участков в низовьях Нила. В результате ежегодных разливов реки границы участков размывались. Для разметки прямых углов землемеры Древнего Египта использовали прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Отсюда и происходит название — «египетский». Иногда говорят, что этот треугольник — начало геометрии. Свойства египетского треугольника были известны также в Древнем Вавилоне и Древнем Китае.

Сделанный нами сгиб образует и другие треугольники. Используя принцип подобия, можно найти их стороны. Они тоже будут египетскими. Результат смотрите на рисунке 14.

Далее вы можете изменить положение точки Е, что приведет к открытию новых закономерностей. Эта пропедевтическая задача знакомит учащихся с новыми геометрическими идеями, которые можно использовать для прикладных задач.

§ 3. Урок обобщения и систематизации знаний

Урок обобщения и систематизации знаний по учебной теме решает следующие учебные задачи:

➠ выделение ведущих идей и понятий темы, установление логических связей между ними, а также связей с однородными понятиями, изученными ранее;

➠ дальнейшее формирование представлений о математическом моделировании, связи математики с действительностью;

➠ выделение общих методов познания, посредством которых были получены новые знания;

➠ выделение ключевых задач темы и способов их решения.

На уроке обобщения и повторения подводим основные итоги изучения предлагаемой темы уже на более высоком уровне.

Для систематизации и повторения ключевых задач и методов решения желательно подбирать практико-ориентированные задания. Методы и формы проведения уроков обобщения и систематизации могут быть различными: деловая игра, семинар, защита проектов, групповая, коллективная, индивидуальная формы работы учащихся и т. д.

Примеры системы упражнений по теме «Теорема Пифагора»:

Задача 1. С самолета радируют капитану рыболовецкого судна, что самолет находится над косяком рыбы на высоте 1000 м. С судна определяют, что угол, под которым виден самолет над горизонтом, равен 30^0. Найдите расстояние от судна до косяка рыбы. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу метров.

Ответ: 1700 м.

Задача 2. Угол подъема лестницы дачного домика равен 60^0. Найдите высоту ступенек лестницы, если их ширина равна 20 см. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу сантиметров.

Ответ: 34 м.

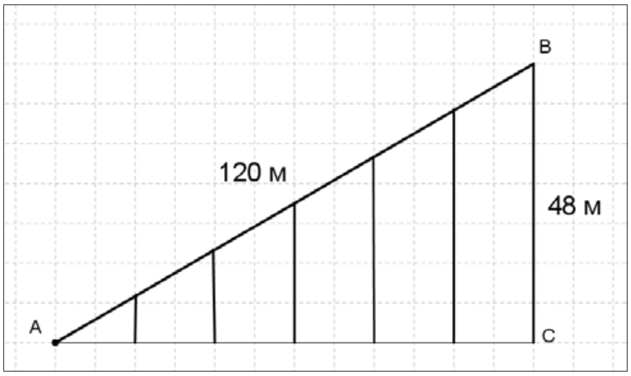


Рис. 15

Задача 3. Строят прямолинейную наклонную эстакаду длиной 120 м, поднимающуюся на 48 м. Шесть опор для этой эстакады ставят на равных расстояниях друг от друга (рис. 15). Каковы высоты этих опор в метрах?

Ответ: 8, 16, 24, 32, 40, 48 м.

Задача 4. Пожарная лестница, укрепленная на машине, может быть выдвинута на 20 м, а ее наклон может достигать 60^0. Основание лестницы находится на высоте 2 м. До какого этажа можно по ней добраться, если высота этажа 3 м?

Ответ: до шестого этажа.

§ 4. Практико-ориентированные задачи на факультативах по математике

Одна из форм организации образовательного процесса во внеурочное время — это факультативное занятие, которое направлено на расширение и углубление знаний по учебной дисциплине в соответствии с требованиями, возможностями и влечениями учащихся, а также на повышение активности их познавательной деятельности. Слово «факультативный» означает «необязательный». Это добровольный выбор учащихся, а приобщение их к исследовательской деятельности в рамках факультатива поможет становлению и развитию познавательных компетенций.

Геометрический материал развивает мышление, играет важную роль в формировании у школьников умения учиться и связывать практику с теорией.

Практико-ориентированные задачи здесь крайне важны, так как при их решении внимание учащихся акцентируется на практическом применении свойств и теорем в повседневной жизни, раскрывается связь геометрии с окружающей действительностью.

Постоянное развитие творческой активности и самостоятельности школьников, учет разнообразия их интересов, особенностей умственного и психического развития требуют самого широкого применения проектной деятельности на факультативных занятиях по математике и частого проведения различных лабораторных работ.

Проведение защиты проектов предоставляет учащимся уникальную возможность выступать с самостоятельными сообщениями, без оглядки на персоналии отстаивать свои суждения, приучая школьников к углубленному изучению различных источников.

Разберем серию открытых практико-ориентированных задач, решение которых можно оформить и как лабораторную работу, и как индивидуальный или групповой проект. Рассмотрим важные задачи, в которых требуется проложить кратчайшую дорогу, удовлетворяющую заданным условиям, или выбрать кратчайший маршрут, используя уже имеющиеся дороги, или, наконец, выбрать такое место для строительства какого-либо объекта, чтобы впоследствие транспортные расходы, связанные с его обслуживанием, оказались минимальными. Подобные задачи нередко возникают в современной жизни, и многое зависит от правильности их решения.

Задача 1. Для снабжения водой двух населенных пунктов, расположенных по одну сторону канала, требуется на берегу этого канала построить водонапорную башню. В каком месте следует построить башню, чтобы суммарная длина труб от нее до каждого из пунктов (по прямой) была наименьшей?

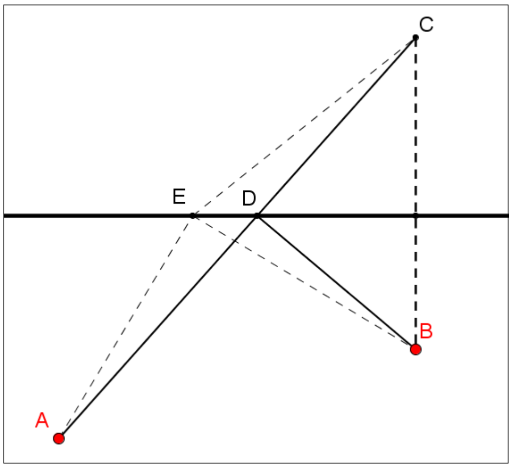


Рис. 16

Решение

Один из двух населенных пунктов A или B, например B, отразим симметрично относительно канала (точнее, относительно его ближайшего берега). Если мы соединим отрезком полученную точку C с точкой A, то точка D пересечения этого отрезка с каналом и будет искомой точкой расположения водонапорной башни (рис. 16).

В самом деле, для любой другой точки E на том же берегу канала суммарная длина труб до точек A и B будет равна суммарной длине труб до точек A и C (в силу симметрии относительно канала имеем равенства EB = EC и DB = DC), которая в свою очередь будет превосходить величину AC = AD + DB.

Задача 2. Магистраль и канал пересекаются под углом меньше 45°, внутри которого расположен населенный пункт. Как проложить кратчайшую дорогу, проходящую от данного пункта сначала к берегу канала, а затем к магистрали (рис. 17)?

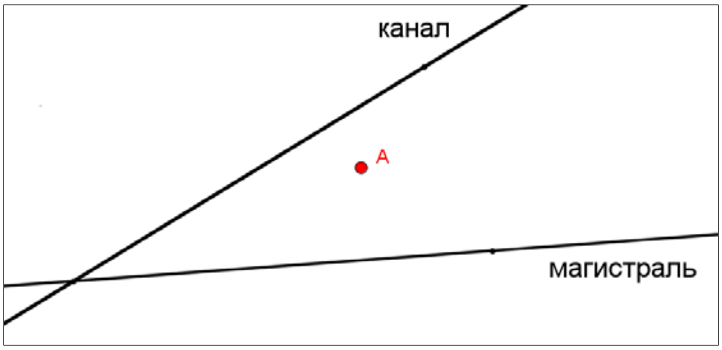


Рис. 17

Отразив симметрично относительно канала данный населенный пункт A, мы получим точку B, из которой достаточно теперь опустить перпендикуляр BC к магистрали, пересекающий канал в точке D (рис. 18).

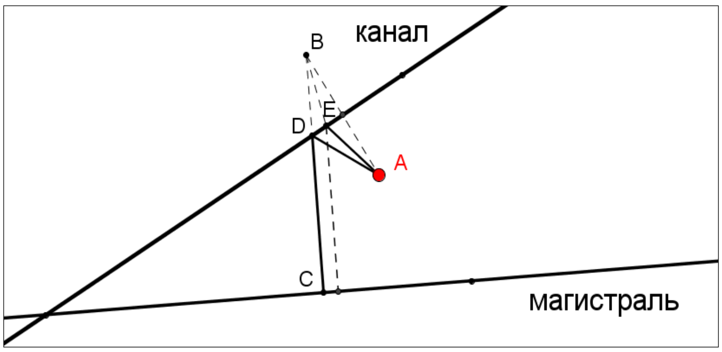


Рис. 18

Для доказательства того, что кратчайший маршрут от точки A к каналу, а затем к магистрали представляет собой ломаную ADC, заметим следующее: для любой другой точки E канала сумма расстояний от точки A до канала и от точки A до магистрали будет равна сумме расстояний от точки B до канала и от точки B до магистрали, которая в свою очередь будет превосходить величину BC = AD + DC (рис. 18).

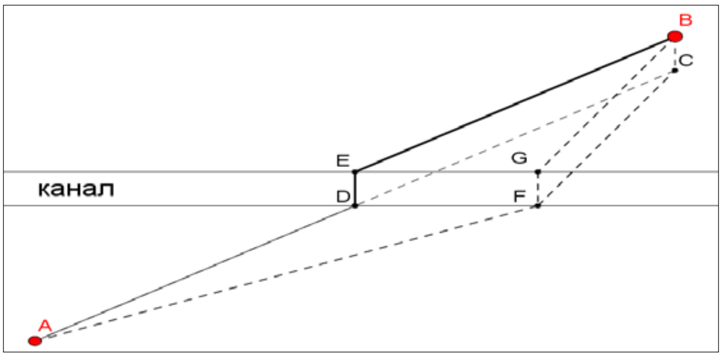


Рис. 19

Задача 3. Два населенных пункта расположены по разные стороны от широкого канала. Требуется построить мост через канал (перпендикулярно берегам) и проложить к нему дороги от обоих пунктов. В каком месте следует построить мост, чтобы в итоге путь между данными пунктами оказался кратчайшим?

Решение

Один из двух населенных пунктов A или B, например B, перенесем мысленно по направлению к каналу на определенное расстояние, равное ширине этого канала (рис. 19).

Полученную точку C соединим отрезком с точкой A, тогда точка D пересечения этого отрезка с берегом канала, ближайшим к точке A, как раз и даст один из концов моста DE. Докажем, что маршрут ADEB будет кратчайшим из всех возможных. Отметим, что доказательство можно проводить многими способами. Приведем один из них. Действительно, для любого другого расположения моста FG (точка F не совпадает с точкой D, но лежит на том же берегу) имеем:

$$AF + FG + GB = AF + FC + FG > AC + FG = AD + DC + DE = AD + DE + EB,$$

то есть любой другой маршрут получается только длиннее.

Далее, проводя компьютерный эксперимент, школьник дает волю своей фантазии, моделирует и конструирует динамический чертеж, удовлетворяющий поставленному условию, и наблюдает за ним и за величинами, неразрывно с ним связанными.

§ 5. Практико-ориентированные задачи в элективных курсах

В предыдущих параграфах были рассмотрены практико-ориентированные задачи в основной школе. Причем можно заметить, что наиболее активно использовалась теорема Пифагора. Именно в случае ее применения можно было сделать большую подборку по-настоящему практико-ориентированных задач. Ниже предложены задачи для старших классов. Они также тематически близки.

Задача 1. Найдите кратчайшее расстояние от точки на окружности нижнего основания цилиндра высотой h и радиусом r до противоположной точки окружности верхнего основания (рис. 20).

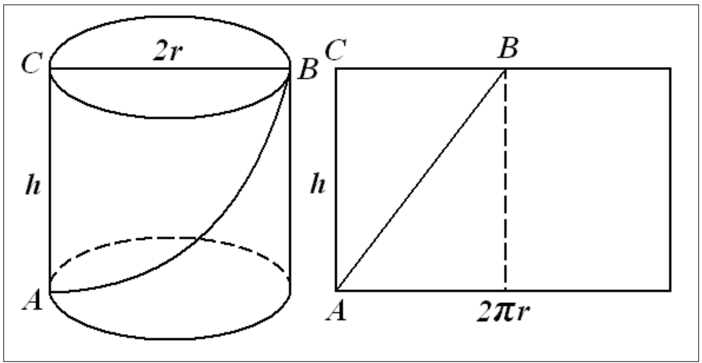


Рис. 20

Р е ш е н и е

Фактически это продолжение уже рассмотренной выше задачи о пауке и мухе. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности цилиндра, по которому паук может доползти до мухи. Одним из кратчайших расстояний будет путь ACB, равный $h + 2r$. Другим является путь по дуге AB, являющейся прямой на развертке боковой поверхности цилиндра. Таким образом, следует сравнить два пути. Пусть эти расстояния равны. Тогда из равенства $h + 2r = \sqrt{h^2 + \pi^2 r^2}$ получаем высоту цилиндра при заданном радиусе:

$$h_0 = \frac{\pi^2 - 4}{4} \cdot r \approx 1{,}4674 \cdot r \cdot$$

В результате имеем следующий критерий: если $h > h_0$, то кратчайшим расстоянием будет дуга. В этом случае дуга становится ближе к гипотенузе прямоугольного треугольника ABC. Если $h < h_0$, то кратчайшим расстоянием будет путь по катетам треугольника.

Задача 2. На цилиндр длиной 12 см намотана проволока. Длина окружности цилиндра — 4 см, число витков — 4. Найдите длину проволоки.

О т в е т: 20 см.

Это задание из выпускного экзамена по математике, вошедшее в экзаменационные материалы 16 стран. Правильно решают эту задачу только 10 % экзаменуемых (только в Швеции целых 24 %). При этом для того чтобы решить ее, нужно использовать только ту математику, которую осваивают до восьмого класса российской школы.

Задача 3. Телевизионные радиосигналы распространяются на 15 % дальше пределов прямой видимости антенны. При каком наибольшем расстоянии S от передающей антенны высоты H можно принять телепередачу с помощью антенны высотой h?

Решение

Из рисунка 21 найдем синус угла α:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(R+H)^2 - R^2}}{R+H}.$$

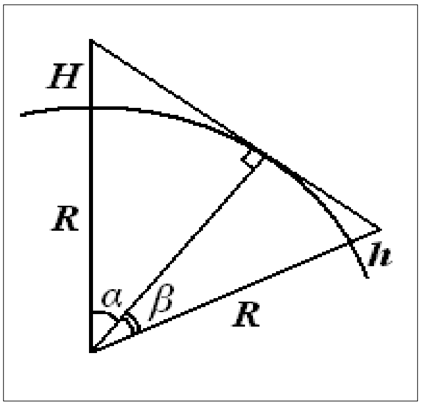


Рис. 21

Учитывая то, что углы небольшие, то есть $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\sin\beta \approx \beta$, получаем следующую формулу для вычисления расстояния:

$$S = R(\alpha+\beta) = \sqrt{2RH} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{H}{2R}}}{1+\frac{H}{R}} + \sqrt{2Rh} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{h}{2R}}}{1+\frac{h}{R}}.$$

Воспользуемся некоторым преобразованием, чтобы упростить формулу:

$$\frac{\sqrt{1+\frac{x}{2}}}{1+x} \approx \frac{1+\frac{x}{4}}{1+x} \approx \left(1+\frac{x}{4}\right)(1-x) \approx 1-\frac{3}{4}x.$$

Но даже если высота передающей антенны равна 0,5 км, поправка составит совершенно незначительную величину:

$$\frac{3H}{4R} \approx \frac{3}{4\cdot 2\cdot 6400} \approx 0{,}0000568.$$

Таким образом, наибольшее расстояние приема телепередачи с учетом 15 % равно:

$$S = 4115\cdot\left(\sqrt{H}+\sqrt{h}\right),$$

где высоты антенн даются в метрах.

Задача 4

а. Радиус шара равен 15 см. Определите часть его поверхности, видимую из точки, удаленной от центра на 25 см.

Ответ: 180π.

б. На каком расстоянии от центра шара радиуса R должна быть светящаяся точка, чтобы она освещала 1/3 его поверхности?

Ответ: $2R$.

в. Какую долю земной поверхности может охватить взглядом космонавт с высоты 400 км?

Ответ: 1/34.

Литература

1. *Иванов, С. Г.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» / С. Г. Иванов, В. И. Рыжик. — М. : Просвещение, 2013. — 144 с.

2. *Мерзляк, А. Г.* Геометрия. 8 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — М. : Вентана-Граф, 2013. — 208 с.

3. *Смирнов, В. А.* Геометрия на клетчатой бумаге : учебное пособие для общеобразовательных учреждений / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. — М. : МЦНМО, 2009. — 264 с.

4. *Смирнова, И. М.* Геометрические задачи с практическим содержанием / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : МЦНМО, 2010. — 136 с.

Глава II

Формула Ньютона — Симпсона

В процессе реформирования школьной математики за последние 50 лет был исключен из программы ряд очень интересных и несложных теорем. Это *теоремы Гюльдена* и *формула Ньютона — Симпсона*. В 1960-х годах средние школы были политехническими, обучение стояло ближе к практике, и повышенное внимание обращалось именно на практическое использование школьником теоретических знаний, полученных на уроках. В известном задачнике по геометрии того времени, который был востребован наряду с учебниками А. П. Киселева [3], мы обнаруживаем задачи на применение этих теорем. Причем вначале предлагается проверить их для случаев известных простых тел, а потом уже посчитать объем более сложных фигур. В этой главе мы разберем применение формулы Ньютона — Симпсона. Сама формула не только легко выводится, но и легко запоминается. Но самое интересное, что одна и та же формула используется в двух разделах математики.

Дело в том, что в математическом анализе для приближенного исчисления интегралов (а это материал первого курса университета) используется *малая формула Симпсона*:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + f(b) + 4f(c) \right) \text{ (1)},$$

где $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ — значение функции в соответствующих точках, а

$$c = \frac{a+b}{2} \text{ (рис. 22)}.$$

А уже в «Геометрии» А. Ю. Калинина [2] та же формула приводится со следующей формулировкой: *Если площадь сечения тела плоскостью* $z = const$ *является функцией вида* $S(z) = az^2 + bz + c$, *где* $0 \le z \le h$, *то объем тела, расположенного между плоскостями* $z = 0$ *и* $z = h$, *равен*

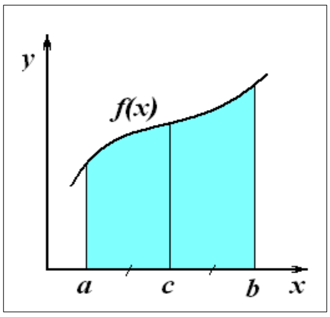


Рис. 22

$$V = \frac{h}{6} \cdot \left(S(0) + S(h) + 4S\left(\frac{h}{2}\right) \right). \text{ (2)}$$

В известном учебнике Л. С. Атанасяна [1] формула дается в несколько другой формулировке в конце учебника в одной-единственной задаче, то есть, по сути, не для всех школьников. Между тем в задачнике середины прошлого века ей посвящены более десяти задач, обязательных для всех учащихся. Формулы для вычисления интегралов и Ньютона — Симпсона являются точными, если подынтегральная функция есть многочлен не выше третьей степени.

Покажем это на примере вычисления объема. Пусть сечение тела плоскостью $z = const$ является функцией вида $S(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$. Найдем *объем тела* по общей формуле:

$$V = \int_0^h S(z)dz = \frac{ah^4}{4} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^2}{2} + dh = \frac{h}{6}\left(\frac{3ah^3}{2} + 2bh^2 + 3ch + 6d\right).$$

С другой стороны, запишем систему равенств:

$$\begin{cases} S(0) = d; \\ S(h) = ah^3 + bh^2 + ch + d; \\ 4S\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{ah^3}{2} + bh^2 + 2ch + 4d. \end{cases}$$

В результате сложения получаем выражение в скобках в формуле объема (2), приведенной выше. Так как для пирамиды, усеченной пирамиды, конуса, усеченного конуса, шара, призмы выполняется необходимое условие уже квадратичной зависимости площади сечения от аппликаты, формула получается достаточно универсальной. Примером тела, зависимость площади сечения которого от координаты выражается многочленом третьей степени, является тело, получаемое вращением полукубической параболы Нейля $y^2 = ax^3$ вокруг оси абсцисс.

§ 1. Приближенные вычисления интегралов

Обратимся к применению формул (1) и (2). Если речь идет о приближенном вычислении интегралов, то вопрос точности можно проанализировать на конкретных примерах, не углубляясь в сложную теорию. Вычисляя интеграл по формуле Симпсона, мы фактически аппроксимируем подынтегральную функцию кубической параболой. К чему это приводит, рассмотрим ниже на примерах.

Задача 1. Вычислите интеграл $\int_0^1 x^4 dx$ и оцените точность полученного значения.

Решение

По формуле Симпсона:

$$I = \int_0^1 x^4 dx \cong \frac{1}{6} \cdot \left(0 + 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \right) = \frac{5}{24},$$

точное же значение интеграла равно:

$$I_0 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, отклонение вычисленного значения интеграла по формуле Симпсона от точного значения $\frac{|I_0 - I|}{I_0} \cdot 100\ \% \approx 4{,}17\ \%$.

Задача 2. Вычислите интеграл $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ и оцените точность полученного значения.

Решение

По формуле Симпсона:

$$I = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \cong \frac{4}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{4}{1 + \frac{1}{4}} \right) = \frac{47}{15} = 3{,}1(3),$$

точное же значение интеграла равно:

$$I_0 = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 4 arctg 1 = \pi.$$

Таким образом, отклонение вычисленного значения интеграла по формуле Симпсона от точного значения $\approx 0{,}263\ \%$. Простейшее приближение $\pi \approx \frac{22}{7}$ дает отклонение $\approx 0{,}126\ \%$.

Задача 3. Вычислите интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ и оцените точность полученного значения.

Решение

По формуле Симпсона:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \cong \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{25}{36},$$

точное же значение интеграла равно:

$$I_0 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ell n 2 .$$

Отклонение вычисленного значения интеграла по формуле Симпсона от точного значения $\approx 0{,}187\ \%$.

Задача 4. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot dx$ и оцените точность полученного значения.

Решение

По формуле Симпсона:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot dx \cong \frac{\pi}{12} \cdot \left(0 + 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4},$$

точное же значение интеграла равно:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot dx = \frac{\pi}{4} \text{ (!).}$$

Здесь вовсе нет различия между значениями.

Приближенное вычисление интегралов не входит в программу, однако умение оценить численное значение интеграла будет полезным навыком для интересующихся математикой, тем более что для этого в программе по геометрии есть надежный инструмент в виде формулы Симпсона. Кроме того, полученные результаты иногда показывают высокую точность таких приближений.

§ 2. Вычисление объемов

Примеры для вычисления объемов также можно взять из учебника Киселева. Можно начать с объемов классических тел. Например, *объем усеченного конуса* с радиусами оснований r и r_1 и высотой h равен:

$$V = \frac{h}{6} \cdot \left(\pi r^2 + \pi r_1^2 + 4 \cdot \pi \left(\frac{r + r_1}{2} \right)^2 \right) = \frac{\pi h}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

Найдем *объем трехосного эллипсоида* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Учитывая, что $S(-c) = S(c) = 0$, $S(0) = \pi ab$, так как в сечении имеем эллипс, получаем:

$$V = \frac{2c}{6} \cdot \left(S(-c) + 4S(0) + S(c) \right) = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Далее основное внимание уделим определению *объемов усеченных призм,* у которых секущая плоскость не параллельна основанию.

Задача 5. Докажите, что объем треугольной усеченной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен произведению площади перпендикулярного сечения $S_\perp$ на среднее арифметическое длин трех боковых ребер.

Решение

Имеем площадь сечения:

$$S(0) = S_{CC_1B_1B} = \frac{n + l}{2} \cdot a; \; S(h) = 0,$$

где $a = RQ$, $h = \frac{2S_\perp}{a}$ (рис. 23).

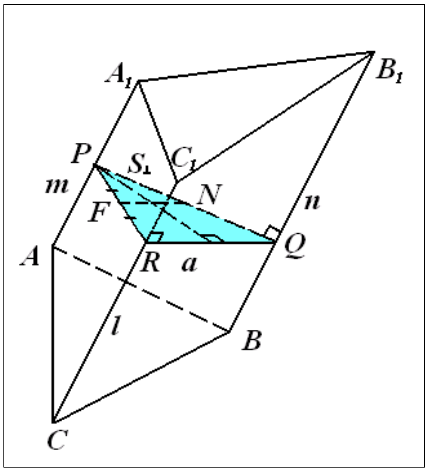


Рис. 23

Если через середины PR и PQ провести отрезки, параллельные ребрам, то площадь:

$$S\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\frac{m+n}{2} + \frac{m+l}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}.$$

После подстановки в формулу Симпсона окончательно получаем объем усеченной призмы:

$$V = S_\perp \cdot \frac{m + n + l}{3} \; (3).$$

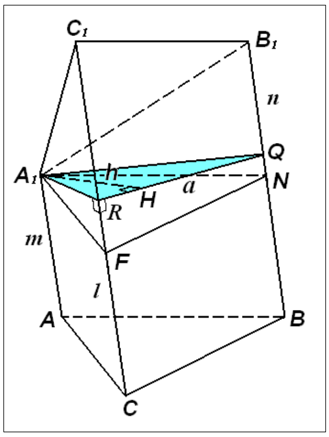


Рис. 24

Стоит отметить, что формулу для треугольной усеченной призмы можно получить и без обращения к формуле Симпсона. Для этого рассмотрим рис. 24. Проведем сечение A_1NF, параллельное основанию и проходящее через конец наименьшего ребра AA_1. Тогда объем призмы $ABCA_1NF$ будет равен $V_1 = S_\perp \cdot m$.

Учитывая, что A_1H есть перпендикуляр к плоскости C_1B_1NF, получаем объем пирамиды $A_1C_1B_1NF$:

$$V_2 = \frac{h}{3} \cdot a \cdot \frac{(l-m)+(n-m)}{2} = S_\perp \cdot \frac{l+n-2m}{3}.$$

Таким образом, суммируя объемы, получаем тот же результат (3). Рассмотрим несколько задач на объемы усеченных призм из учебника [3] (задачи 6, 7 и частично 8).

Задача 6. В треугольной усеченной призме боковые ребра имеют длины 17 см, 25 см, 30 см, а расстояния между ними — 18 см, 20 см, 34 см. Найдите объем призмы.

Решение

По *формуле Герона* считаем площадь перпендикулярного сечения и подставляем в формулу (2):

$$V = 144 \cdot 24 = 3456 \ \ (\text{см}^3).$$

Задача 7. В усеченной правильной четырехугольной призме дано: сторона основания равна a; из боковых ребер два смежных имеют длину b, два других — длину c (рис. 25). Определите объем.

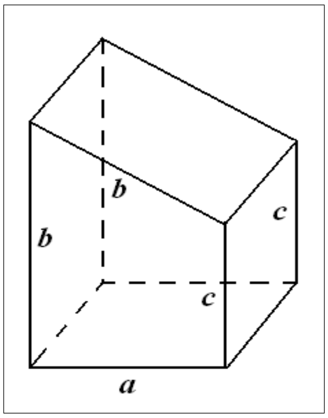


Рис. 25

Решение

По формуле (2) находим объем:

$$V = \frac{a}{6} \cdot \left(ac + ab + 4a \cdot \frac{b+c}{2} \right) = \frac{a^2}{2}(b+c).$$

Следующая задача является обобщением предыдущей.

Задача 8. В усеченном параллелепипеде три боковых ребра по порядку имеют длины *a*, *b*, *c*, площадь перпендикулярного сечения $S_\perp$. Определите длину четвертого бокового ребра и объем тела (рис. 26).

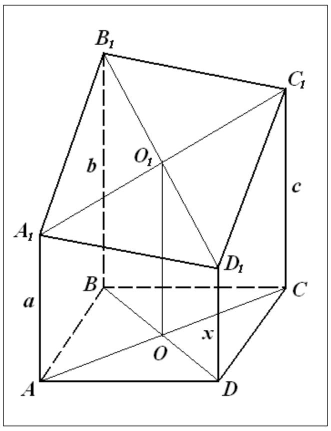


Рис. 26

Решение

Так как прямые пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны, то в сечении имеем параллелограмм. Отрезок OO_1 в диагональных сечениях является средней линией трапеций. Таким образом, получаем равенство $OO_1 = \frac{a+c}{2} = \frac{b+x}{2}$, из которого следует значение длины неизвестного ребра: $x = a + c - b$.

Тело составлено из двух усеченных треугольных призм с одинаковой площадью перпендикулярного сечения, объем усеченного параллелепипеда равен:

$$V = \frac{S_\perp}{2} \cdot \frac{a+b+x}{3} + \frac{S_\perp}{2} \cdot \frac{b+c+x}{3}.$$

После подстановки значения ребра *x* получаем любопытный результат:

$$V = S_\perp \cdot \frac{a+c}{2} = S_\perp \cdot OO_1.$$

Литература

1. *Атанасян, Л. С.* Геометрия. 10—11 классы : учебник для общеобр. организаций: базовый и профильный уровни / Л. С. Атанасян. — М. : Просвещение, 2014. — 255 с.

2. *Калинин, А. Ю.* Геометрия. 10—11 классы : учебник для общеобр. учреждений: профильный уровень / А. Ю. Калинин, Д. А. Терешин. — М. : МЦНМО, 2011. — 640 с.

3. *Киселев, А. П.* Геометрия. 10—11 классы / А. П. Киселев, Н. А. Рыбкин. — М. : Дрофа, 1995. — 224 с.

4. *Малышев, И. Г.* Теоремы Паппа — Гюльдена / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2015. — № 4. — С. 48—54.

5. *Малышев, И. Г.* Формула Ньютона — Симпсона / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2017. — № 7. — С. 46—50.

Глава III

Плоские кривые и их свойства

Во многих УМК в примерных программах по алгебре и началам математического анализа предусмотрена тема «Примеры применения интеграла в физике и геометрии». Неудивительно, что многие учителя стараются эту тему «не замечать», предпочитая потратить отведенные на нее два урока на подготовку к ЕГЭ, что кажется им более разумным. Между тем в зарубежных школах примеры, где фигурируют интеграл и его приложения, изучаются весьма подробно, и программа у них в результате более практико-направленная, чем у нас.

Для определенного контингента школьников, тяготеющих к физико-математическим дисциплинам, был бы интересен и полезен систематический курс приложений интеграла объемом хотя бы 5—6 часов. Но для этого нужно, чтобы это был не простой перебор разнородных заданий, а определенный набор задач на заданную тему. Одной из таких тем может быть вопрос о физических свойствах известных кривых.

В некоторых учебниках по геометрии упоминаются плоские кривые. Например, в учебнике И. М. и В. А. Смирновых [3] этот материал дан как дополнительный с целью описать некоторые замечательные кривые на плоскости (спираль Архимеда, трилистник, циклоида и т. п.). К параграфу также прилагаются задачи повышенной трудности на эту тему. Во многих классических школьных учебниках по планиметрии этот материал отсутствует. Многие кривые известны не только своей красотой, но и физическими свойствами, которые были раскрыты в XVII—XVIII веках. Этот интересный материал факультативного характера способен сделать замечательные кривые еще более замечательными для учащихся.

Скатывание материальной точки под действием силы тяжести

Рассмотрим кривые, по которым скатываются материальные точки под действием только силы тяжести.

Задача 1. Определите вид кривой, по которой материальная точка, скатываясь под действием только силы тяжести, сохраняет начальную вертикальную составляющую скорости (кривая 1 на рис. 27).

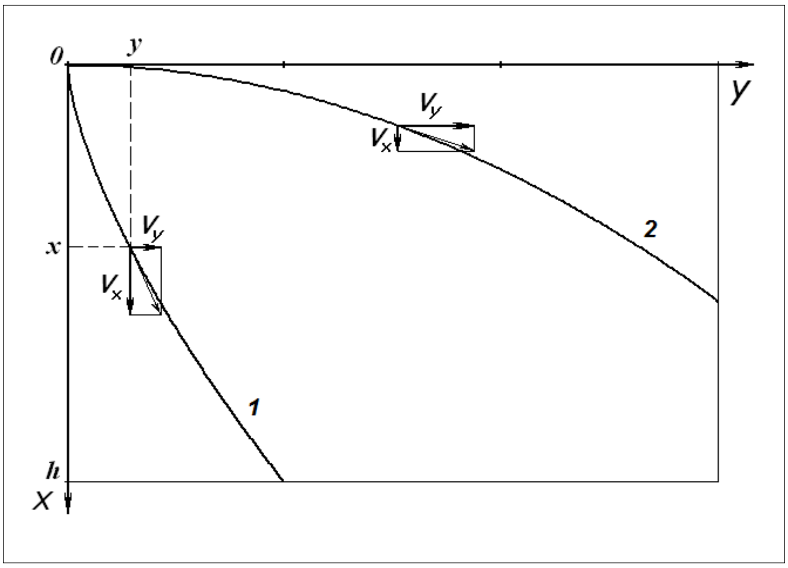


Рис. 27

Решение

Выберем направление осей в системе координат таким образом, чтобы движение точки осуществлялось с положительной скоростью, а координаты возрастали. Для этого повернем ее на 90 градусов по часовой стрелке. Пусть в начале координат материальная точка имеет начальную скорость. Запишем закон сохранения энергии для материальной точки, имеющей начальную кинетическую энергию $\frac{mv_0^2}{2}$ и некоторый запас потенциальной энергии mgh, относительно уровня с координатой $x = h$:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + mg(h - x).$$

После сокращения получаем равенство:

$$v_0^2 = v^2 - 2gx \text{ или } v_0^2 = v_x^2 + v_y^2 - 2gx,$$

где v_x и v_y — проекции скорости на оси.

Пусть материальная точка имеет начальную вертикальную скорость и она сохраняется при всем движении точки по кривой, то есть $v_0^2 = v_x^2 = const$.

Таким образом, $v_y = \sqrt{2gx}$, а так как $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \frac{dy}{dx}$, то получаем следующее дифференциальное уравнение с разделенными переменными относительно $y(x)$:

$$dy = \frac{\sqrt{2g}}{v_0} \cdot \sqrt{x} \cdot dx .$$

После интегрирования $\int\limits_0^y dy = \frac{\sqrt{2g}}{v_0} \int\limits_0^x \sqrt{x} dx$ получаем кривую:

$$y = \frac{2\sqrt{2g}}{3v_0} x^{\frac{3}{2}} \text{ или } y^2 = ax^3 .$$

Это уравнение полукубической параболы, или *параболы Нейля*, который в 1657 году вычислил длину дуги этой кривой. В середине XVII века это являлось большим достижением. В настоящее время подобное нетрудно воспроизвести на уроке, воспользовавшись формулой для вычисления длины кривой $l = \int\limits_0^{x_0} \sqrt{1 + (y')^2} dx$. Выбрав для удобства пределы интегрирования так, чтобы размерность x и y была одинакова и равна размерности $\frac{1}{a}$, получаем:

$$l = \int\limits_0^{\frac{1}{4a}} \sqrt{1 + \frac{9ax}{4}} dx = \frac{61}{216a} .$$

В истории математики и физики большую роль сыграли кривые второго порядка — эллипс, парабола и гипербола. В программе математических классов предполагается выделение некоторого времени для их изучения. Это необходимо, так как в курсе астрономии 11-го класса учащиеся встречаются с ними при изучении законов Кеплера. Таким образом, в рамках общеобразовательной школы учитель при желании и возможности, например, в зависимости от состава класса, может дать вывод канонических уравнений кривых второго порядка.

Задача 2. Определите вид кривой, по которой материальная точка, скатываясь под действием только силы тяжести, сохраняет начальную горизонтальную составляющую скорости (кривая 2 на рис. 27).

Решение

Пусть материальная точка имеет начальную горизонтальную скорость, и она сохраняется при всем движении точки по кривой, то есть:

$$v_0^2 = v_y^2 = const.$$

Таким образом, $v_x = \sqrt{2gx}$, а так как $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \frac{dx}{dy}$, то получаем следующее дифференциальное уравнение относительно $y(x)$:

$$dy = \frac{v_0 dx}{\sqrt{2gx}}.$$

После интегрирования $\int_0^y dy = \int_0^x \frac{v_0}{\sqrt{2gx}} dx$ получаем кривую:

$$y = \frac{\sqrt{2} \cdot v_0}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{x} \text{ или } y^2 = 2px.$$

Это *каноническое уравнение квадратичной параболы*.

Параболическое зеркало

Задача 3. Определите профиль зеркала, для которого свет, отраженный от его поверхности, исходил бы параллельным пучком.

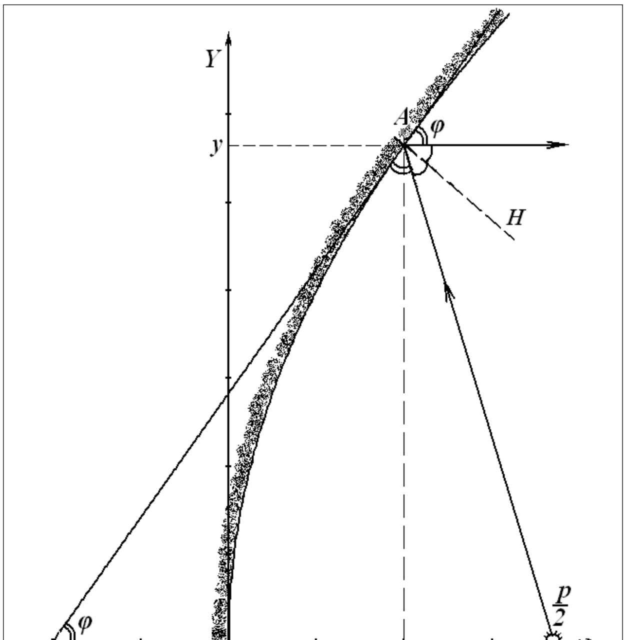


Рис. 28

Решение

В данной классической задаче лучи, исходящие от источника света, расположенного в точке $C\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$на оси абсцисс, после отражения распространяются параллельно оси абсцисс [4] (рис. 28 на с. 37). Так как угол падения света (CAH) равен углу отражения (отмечены на рисунке одной дугой), то угол наклона касательной к кривой в точке А равен углу BAC. Учитывая, что $CB = AC$, запишем цепочку равенств:

$$y' = tg\varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2} - \left(\frac{p}{2} - x\right)} = \frac{\sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2} - \left(x - \frac{p}{2}\right)}{y}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение принимает вид:

$$ydy + \left(x - \frac{p}{2}\right)dx = \sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2}\,dx,$$

который преобразуется до следующего:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d\left(y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2\right)}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2}} = dx \text{ или } d\sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2} = d\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Интегрирование приводит к равенству $\sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2} = \left(x - \frac{p}{2}\right) + C$ с постоянной интегрирования C или $y^2 = C^2 + 2C\left(x - \frac{p}{2}\right)$. Учитывая, что $y(0) = 0$, получаем частное решение: $y^2 = 2px,$ то есть опять *каноническую формулу параболы*. Другое частное решение $y = 0$ соответствует распространению света непосредственно от источника вдоль оси абсцисс.

Циклоида

Следующая замечательная кривая — это циклоида. Она является одной из самых известных трансцендентных плоских кривых. Название ей дал Галилей.

Кроме того, с циклоидой были связаны работы Торичелли, Паскаля, Декарта, Ферма, Роберваля, Лейбница, братьев Бернулли и Гюйгенса. Последними и были получены наиболее выдающиеся результаты.

В отличие от ряда предыдущих функций, параметрическое задание циклоиды удобнее, чем явная зависимость $y(x)$ от x. *Циклоида* — это траектория фиксированной точки обода колеса радиуса R, катящегося по прямой без проскальзывания. На рис. 29 показаны катящееся колесо и половина арки циклоиды.

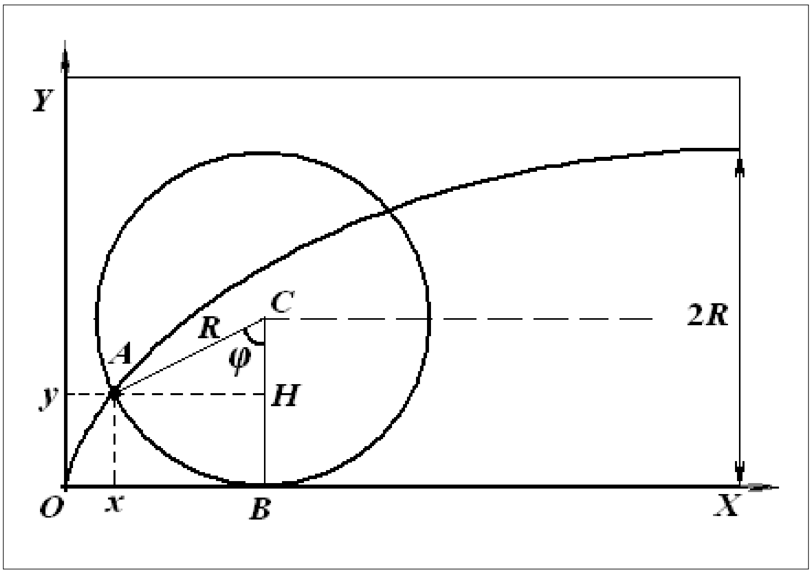


Рис. 29

Выпишем координаты точки A, исходя из условия, что пройденное расстояние OB равно дуге AB на колесе. Таким образом:

$$x = OB - AH = \cup AB - R\sin\varphi \text{, а } y = BC - CH = R - R\cos\varphi,$$

то есть для случая движения колеса по оси абсцисс:

$$\begin{cases} x = R\varphi - R\sin\varphi; \\ y = R - R\cos\varphi. \end{cases} \quad (1),$$

где угол поворота равен в случае равномерного движения $\varphi = {}^{vt}\!/_{R}$, а v — скорость колеса. Обычно рассматривают только одну арку циклоиды, то есть $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Площадь под одной аркой циклоиды:

$$S = \int_0^{2\pi R} y dx = \int_0^{2\pi} R^2 (1-\cos\varphi)^2 d\varphi \ = 2\pi R^2 - 2R^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi + R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = 3\pi R^2 .$$

Экспериментальный результат был получен первоначально Архимедом, потом Галилеем: площадь под циклоидой в 3 раза больше площади порождающего ее круга. Так же вычисляется длина дуги арки циклоиды:

$$l = \int_0^{2\pi R} \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+ctg^2\frac{\varphi}{2}} \cdot R(1-\cos\varphi)\cdot d\varphi = 8R.$$

Здесь учтено, что $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = ctg\frac{\varphi}{2}$.

Рассмотрим далее удивительное свойство *таутохронности циклоиды,* которое впервые установил Гюйгенс. Оно заключается в следующем: время скатывания материальной точки без трения под действием силы тяжести по циклоиде не зависит от первоначального положения этой точки.

Еще в высшей школе доказывается, что циклоида обладает и другим интересным физическим свойством — время скатывания является минимальным по сравнению с другими всевозможными кривыми. Впервые это было доказано И. Бернулли.

Задача 4. Определите время скатывания материальной точки под действием силы тяжести по циклоиде от заданного первоначального положения этой точки.

Решение

На рис. 30 (на с. 41) показаны половина арки циклоиды и материальная точка на ней с начальными координатами $\left(\frac{x_0}{R};\ \frac{y_0}{R}\right)$. Итак, из закона сохранения энергии следует, что изменение потенциальной энергии равно кинетической:

$$mg(x-x_0) = \frac{mv^2}{2},$$

где $v = \frac{dl}{dt} = \sqrt{1+(y')^2}\cdot\frac{dx}{dt}$ — скорость материальной точки массы m, а x — промежуточная координата.

После преобразований получаем время скатывания:

$$t = \int_{x_0}^{2R} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(x-x_0)}}\,dx.$$

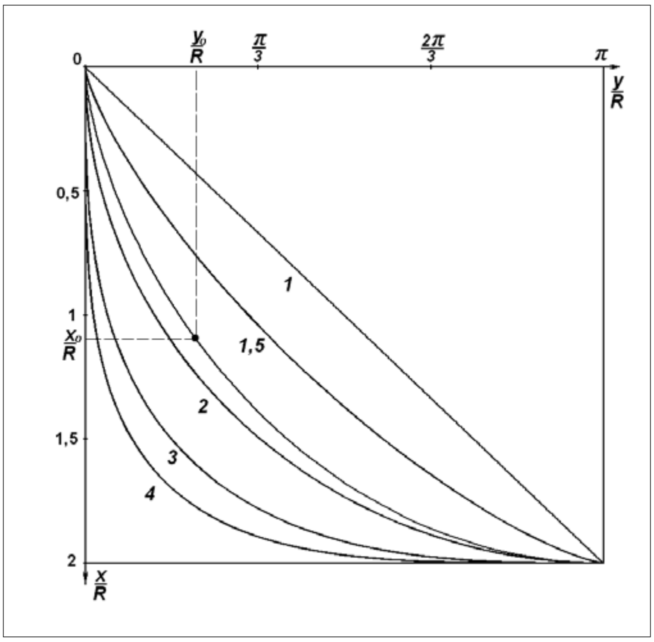


Рис. 30

Отметим, что в случае нашей циклоиды координаты x и y поменялись местами по сравнению с формулами (1), то есть:

$$\begin{cases} y = R\varphi - R\sin\varphi; \\ x = R - R\cos\varphi. \end{cases}$$

Проведем преобразования и замены:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = tg\,\frac{\varphi}{2};$$

$$dx = R\sin\varphi\cdot d\varphi\,,$$

$$x - x_0 = R - R\cos\varphi - R + R\cos\varphi_0\,,$$

$$\text{или}\;\; x - x_0 = 2R\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Переходя к интегрированию по φ, получаем:

$$t = \int\limits_{\varphi_0}^{\pi}\frac{\sqrt{1+tg^2\,\frac{\varphi}{2}}\cdot R\sin\varphi\cdot d\varphi}{2\sqrt{gR}\cdot\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-\cos^2\frac{\varphi}{2}}} = -2\sqrt{\frac{R}{g}}\cdot\int\limits_{\varphi_0}^{\pi}\frac{d\left(\dfrac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2}} = -2\sqrt{\frac{R}{g}}\arcsin\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\Bigg|_{\varphi_0}^{\pi} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

Таким образом, время скатывания до низшего для циклоиды уровня не зависит от начальной высоты x_0 и в любом случае равно $\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ [2].

Результат, который из-за своей необычности совершенно не укладывается в голове!

Задача-исследование. Определите время скатывания материальной точки из начала координат под действием силы тяжести по эллипсоидальным кривым.

В качестве общей формулы эллипсоидальных кривых принимаем зависимость:

$$\left(\frac{x}{2R}\right)^n + \left(\frac{\pi R - y}{\pi R}\right)^n = 1,$$

где n — какое-либо действительное число.

В случае $n=2$ получаем эллипс, в случае $n=1$ имеем наклонную плоскость. Рассматривается только четверть кривой, по которой движется идеальный шарик. Для исследования воспользуемся программой Advanced Grapher. На рис. 30 приведены некоторые кривые в зависимости от показателя степени.

Для удобства вычислений сделаем замену:

$$\left(\frac{x}{2R}\right)^n = \sin^2\varphi \ \text{ и } \ \left(\frac{\pi R - y}{\pi R}\right)^n = \cos^2\varphi;$$

$$\text{то есть } x = 2R\sin^{\frac{2}{n}}\varphi \ \text{ и } \ y = \pi R\left(1-\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\right),$$

$$\text{где } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

После подстановки в формулу времени $T = \int\limits_0^{2R}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gx}}\,dx$ и преобразований получаем сложное выражение:

$$T = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{R}{g}}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{4(\sin\varphi)^{\frac{4}{n}-2}\cdot\cos^2\varphi + \pi^2(\cos\varphi)^{\frac{4}{n}-2}\cdot\sin^2\varphi}}{\sin^{\frac{1}{n}}\varphi}\cdot d\varphi.$$

Во всех случаях, кроме единственного, когда $n=1$, задача решалась только численно. Глядя на формулу, мы понимаем, что это и не удивительно. В случае наклонной плоскости имеем:

$$T=\sqrt{4+\pi^2}\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Полученные с помощью программы Advanced Grapher численные значения интегралов представим в виде графика (рис. 31). Из рисунка следует, что для эллипсоидальных кривых минимальное значение времени скатывания равно:

$$T\approx 3{,}253\cdot\sqrt{\frac{R}{g}},$$

при этом $n\approx 1{,}358$.

Задача может иметь продолжение.

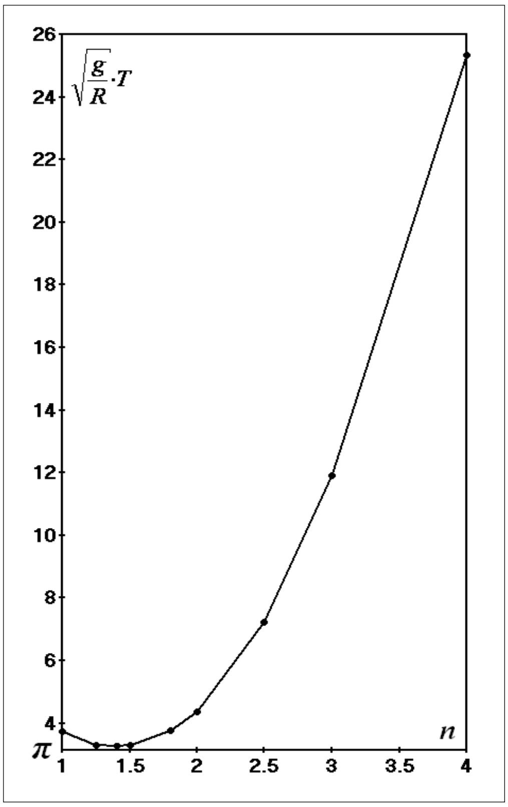


Рис. 31

Для этого выбирается класс каких-либо кривых и находится оптимальное значение параметра, характеризующего эти кривые, обеспечивающее минимальное время скатывания. Конечно, наименьшее время скатывания уже известно, и оно равно $\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Данный материал о замечательных свойствах некоторых плоских кривых практически отсутствует в учебниках, а в ЕГЭ может быть отнесен к разделу Кодификатора требований к уровню подготовки выпускников «Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни». Но, к сожалению, составители заданий ЕГЭ не идут дальше вычислений по готовой физической формуле в задании № 10 и текстовых задач про банковские кредиты в задаче № 17. Между тем математика во времена Ньютона и Эйлера получила развитие именно благодаря задачам про физические свойства плоских кривых.

Литература

1. *Малышев, И. Г.* Плоские кривые и их свойства / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2017. — № 8. — С. 41—47.

2. *Савелов, А. А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения : справочное руководство / А. А. Савелов. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. — 294 с.

3. *Смирнова, И. М.* Геометрия. 7—9 классы : учебник для общеобразовательных учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : Мнемозина, 2005. — 376 с.

4. *Терешин, Н. А.* Прикладная направленность школьного курса математики : книга для учителя / Н. А. Терешин. — М. : Просвещение, 1990. — 96 с.

Глава IV

Теоремы Паппа — Гюльдена

В процессе реформирования школьной математики за последние 50 лет она лишилась еще двух теорем, которые были раньше в программе. Речь идет о теоремах Паппа (александрийский математик III в. н. э.) и Гюльдена (Пауль Гюльден — швейцарский математик, 1577—1643).

В известном учебнике А. П. Киселева [1] вначале предлагается проверить теоремы Гюльдена для случаев вращения известных простых фигур, а уже потом посчитать характеристики сложных фигур. Здесь необходимо отметить, что сами рассматриваемые теоремы не только легко выводятся, но и легко запоминаются. Следует также отметить, что авторам теорем интегральное исчисление было неизвестно.

Теорема 1. Площадь поверхности, образованной вращением плоской кривой вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в той же плоскости кривой, равна длине кривой, умноженной на длину окружности, проходимой ее центром тяжести.

На рисунке 32 показана кривая, вращающаяся вокруг оси абсцисс. Разбиваем отрезок [*a*; *b*] на *n* отрезков длиной Δx. Каждому промежутку Δx на кривой соответствует элемент дуги Δl с координатой y_i. У каждого такого элемента центр тяжести совпадает с ординатой.

Масса *i*-го отрезка m_i равна длине отрезка, то есть $\Delta\ell_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$, а масса всей кривой М равна длине кривой на данном отрезке.

Таким образом, ордината центра тяжести кривой равна:

$$S_3 = \pi \cdot a^2,$$

где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

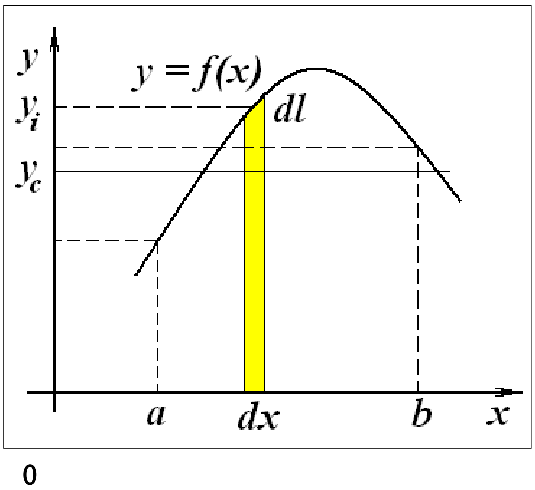


Рис. 32

При замене предела суммы интегралом, а Δx дифференциалом dx получаем ординату центра тяжести:

$$y_c = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_i m_i y_i\right)}{M} = \frac{\int\limits_a^b y dl}{L} = \frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{L}.$$

С другой стороны, поверхность тела вращения равна:

$$F = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

В результате получаем формулу, соответствующую *первой теореме Паппа — Гюльдена*:

$$F = 2\pi \cdot y_c \cdot L$$

Теорема 2. Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в той же плоскости, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, проходимой ее центром тяжести.

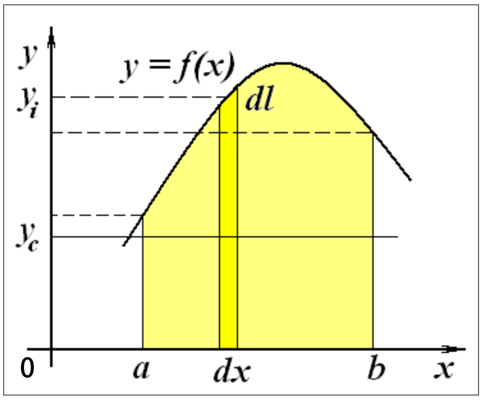


Рис. 33

Если первая теорема мало применима, поскольку вычисления длины какой-либо дуги или площади поверхности вращения сводятся в большинстве случаев к достаточно сложным интегралам, то вторая теорема предоставляет бо́льшие возможности для использования.

Итак, на рисунке 33 показана криволинейная трапеция, вращающаяся вокруг оси абсцисс. Разбиваем пластинку на n полосок толщиной $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ и длиной y_i.

У каждой полоски центр тяжести лежит в ее середине. Масса i-й полоски m_i равна площади этой полоски, то есть $y_i\Delta x$, а масса всей пластинки М равна площади криволинейной трапеции. Таким образом, ордината центра тяжести криволинейной трапеции:

$$y_c = \frac{\sum\limits_i m_i \dfrac{y_i}{2}}{M} = \frac{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2 \cdot \Delta x}{2M}.$$

При замене предела суммы интегралом, а Δx дифференциалом dx получаем ординату центра тяжести:

$$y_c = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_i m_i \frac{y_i}{2}\right)}{M} = \frac{\int\limits_a^b y^2 dx}{2\int\limits_a^b y dx}.$$

С другой стороны, объем тела вращения равен:

$$V = \pi\int\limits_a^b y^2 dx.$$

В результате получаем формулу, соответствующую *второй теореме Паппа — Гюльдена*:

$$V = 2\pi \cdot y_c \cdot S.$$

Рассмотрим задачи на теоремы Паппа — Гюльдена:

Задача 1. Прямоугольник со сторонами a и b вращается вокруг оси, проходящей через вершину параллельно диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объем (рис. 34).

Решение

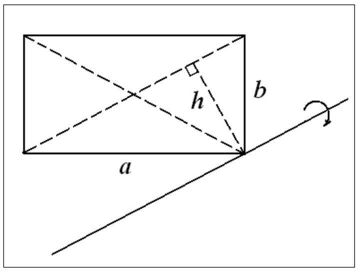


Рис. 34

Учитывая, что $h = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ есть расстояние от центра тяжести до оси, площадь поверхности тела вращения:

$$F = 2\pi h \cdot P = \frac{4\pi \cdot ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

а объем тела вращения равен:

$$V = 2\pi h \cdot S = \frac{2\pi \cdot a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Задача 2. Правильный шестиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной a. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объем (рис. 35 на с. 48).

Решение

Высота треугольника АОВ $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ есть расстояние от центра тяжести до

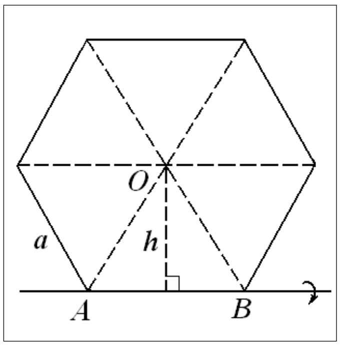


Рис. 35

оси, следовательно, площадь поверхности тела вращения:

$$F = 2\pi h \cdot P = 6\sqrt{3}\pi \cdot a^2,$$

а объем тела вращения равен:

$$V = 2\pi h \cdot S = \frac{9\pi}{2} a^3.$$

Решение учащегося, не знакомого с теоремой, будет несколько длиннее. Площадь поверхности состоит из боковой поверхности двух конусов, боковой поверхности цилиндра и боковой поверхности двух усеченных конусов. Имеем:

$$S_1 = 2\pi ah;\ S_2 = 4\pi ah;\ S_3 = 2\pi a \cdot (h + 2h).$$

В результате:

$$F = S_1 + S_2 + S_3 = 12\pi ah = 6\sqrt{3}\pi \cdot a^2.$$

Тело вращения состоит из цилиндра и двух усеченных конусов за минусом двух конусов. Имеем:

$$V_1 = \pi \cdot a \cdot (2h)^2;$$

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \left((2h)^2 + (h)^2 + (2h) \cdot h\right);$$

$$V_3 = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot (h)^2.$$

В результате:

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \pi a \cdot \left(4h^2 + \frac{7h^2}{3} - \frac{h^2}{3}\right) = 6\pi ah^2 = \frac{9\pi a^3}{2}.$$

Задача 3. Найдите объем и площадь поверхности тора (поверхность, полученная от вращения окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее) с радиусом сечения, равным *r*, и расстоянием от центра сечения до центральной оси, равным *a* (рис. 36).

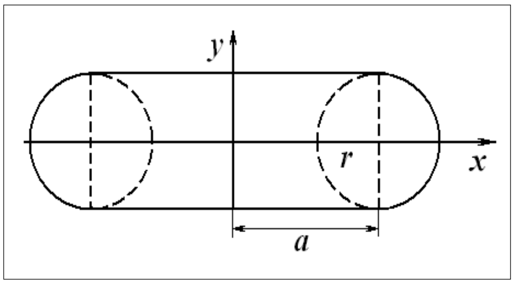


Рис. 36

Эта практически непосильная для большинства школьников задача, связанная с интегралами, легко решается с помощью формул Паппа — Гюльдена. Площадь поверхности тела вращения (в данном случае вращение круга радиуса r вокруг оси ординат):

$$F = 2\pi a \cdot P = 2\pi \cdot a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar\ ,$$

а объем тела вращения равен:

$$V = 2\pi a \cdot S = 2\pi^2 ar^2\ .$$

Решение с помощью интегралов, например для определения объема, приведено ниже.

Решение

Имеем уравнение окружности $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ и рассматриваем вращение положительной части окружности вокруг оси ординат. Таким образом, объем тела вращения равен:

$$V = 2\pi\int_0^r \left(\left(a+\sqrt{r^2-y^2}\right)^2 - \left(a-\sqrt{r^2-y^2}\right)^2\right)dy = 8\pi a\int_0^r \sqrt{r^2-y^2}\,dy = 8\pi a\cdot\frac{\pi r^2}{4} = 2\pi^2 ar^2\ .$$

Задача 4. Спасательный круг представляет собой тор. Диаметр сечения d = 12 см; внешний диаметр спасательного круга D = 75 см. Вычислите поверхность спасательного круга и его объем [1].

Решение

Подставив данные в полученные выше формулы, получаем ответ:

$$F = 4\pi^2 ar = \pi^2 d(D-d) \approx 74{,}61\ (\text{дм}^2),$$

а объем тела вращения равен:

$$V = 2\pi^2 ar^2 = \frac{\pi^2}{4}(D-d)d^2 \approx 22{,}384\ (\text{дм}^3).$$

Задача 5. Из параллельных сторон трапеции б*о*льшая равна a, а меньшая равна b; каждая непараллельная сторона равна c. Эта трапеция вращается около прямой, проведенной перпендикулярно к стороне a через конец последней (рис. 37 на с. 50).

Вычислите полную поверхность полученного тела вращения, если a = 15 см; b = 9 см; c = 5 см (задача выпускного экзамена в гимназии за 1891 год. Дана формулировка тех лет [2]).

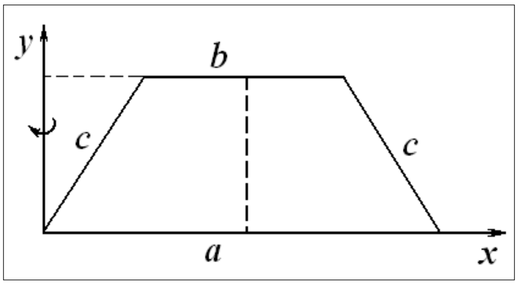


Рис. 37

Р е ш е н и е

Воспользовавшись теоремой, получаем:

$$F = 2\pi \frac{a}{2} \cdot P = \pi(a+b+2c)a,$$

откуда $F = 510\pi \approx 16$ (дм^2)

Дополнительно к площади поверхности тела вращения можно определить и его объем. Для нахождения объема тела вращения необходима площадь трапеции, после вычисления которой имеем объем:

$$V = 2\pi \frac{a}{2} \cdot S = \frac{\pi}{2} a(a+b)\sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \text{ и } V = 720\pi \approx 2{,}262 \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Рассмотрим возможное решение ученика. Площадь поверхности состоит из боковой поверхности конуса, площади кольца, площади круга и боковой поверхности усеченного конуса. Имеем:

$$S_1 = \pi \cdot c \cdot \frac{a-b}{2};\ S_2 = \pi\left(\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2\right) = \pi \cdot ab;\ S_3 = \pi \cdot a^2;\ S_4 = \pi \cdot c \cdot \left(a + \frac{a+b}{2}\right).$$

В результате:

$$F = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \pi(a+b+2c)a.$$

Тело вращения состоит из усеченного конуса без внутреннего конуса. Имеем:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(a^2 + \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2 + a \cdot \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\right);\ V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Таким образом, получаем:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} ha \cdot (a+b) = \frac{\pi}{2} a(a+b) \cdot \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

Задача 6. Паровозное депо имеет в плане вид полукольца (рис. 38 на с. 51: вид спереди и вид сверху), внутренний диаметр которого равен 20 м; ширина полукольца — 9 м; в поперечном сечении депо имеет вид прямоугольной трапеции ABCD (отрезок BC соответствует покатой крыше), параллельные стороны которой равны 4,25 м и 6,5 м. Найдите объем депо [1].

Решение

Площадь трапеции ABCD равна 48,375 м^2, а расстояние от оси до центра тяжести есть $x_c \approx 14{,}5$ м. Таким образом, объем депо равен:

$$V = \pi \cdot x_c S \approx 2204 \text{ м}^3.$$

Конечно, паровозы в настоящее время можно увидеть только в музеях под открытым небом и депо выглядят не так, но здания подобной формы существуют.

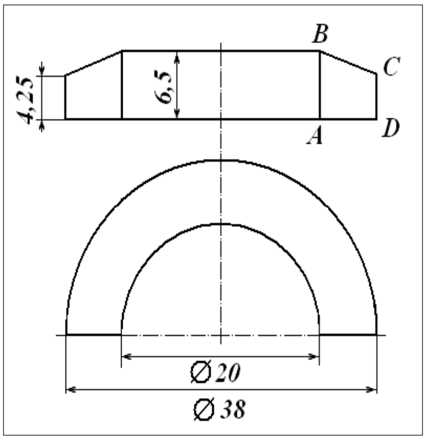


Рис. 38

Задача 7. Правильный восьмиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной *a* (рис. 39). Найдите площадь поверхности тела вращения и его объем.

Решение

В треугольнике АОВ угол при вершине равен 45^0. Высота треугольника АОВ:

$$h = \frac{a}{2} \cdot ctg\, 22{,}5^0 = \frac{a}{2} \cdot \frac{1+\cos 45^0}{\sin 45^0} = \frac{a}{2} \cdot \left(1+\sqrt{2}\right).$$

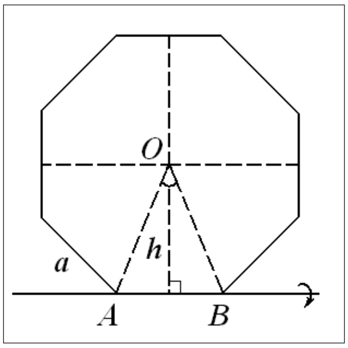


Рис. 39

Это есть расстояние от центра тяжести до оси, следовательно, площадь поверхности тела вращения:

$$F = 2\pi h \cdot P = 8\pi \cdot a^2 \left(1+\sqrt{2}\right),$$

а объем тела вращения равен:

$$V = 2\pi h \cdot S = 2\pi \cdot a^3 \left(3+2\sqrt{2}\right).$$

И опять решение учащегося, не знакомого с теоремой, будет довольно громоздким. Площадь поверхности состоит из боковой поверхности двух конусов, боковой поверхности цилиндра, боковой поверхности двух колец и боковой поверхности двух усеченных конусов. Имеем:

$$S_1 = 2\pi \cdot a\left(h - \frac{a}{2}\right);\ S_2 = 4\pi \cdot ah;$$

$$S_3 = 2\pi\left(\left(h+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(h-\frac{a}{2}\right)^2\right) = 4\pi \cdot ah;\ S_4 = 2\pi \cdot a \cdot \left(2h + h + \frac{a}{2}\right).$$

В результате:

$$F = S_1 + S_2 + S_3 + S_3 = 16\pi ah = 8\pi \cdot a^2\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Тело вращения состоит из цилиндра и двух усеченных конусов за минусом двух конусов.

Имеем:

$$V_1 = \pi \cdot a \cdot (2h)^2;$$

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \left((2h)^2 + \left(h+\frac{a}{2}\right)^2 + (2h)\cdot\left(h+\frac{a}{2}\right)\right);$$

$$V_3 = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \left(h-\frac{a}{2}\right)^2.$$

Таким образом, получаем:

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = 2\pi\sqrt{2}\cdot ah^2 + \pi\sqrt{2}\cdot a^2h + 4\pi\cdot ah^2 = 2\pi\cdot a^3\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

Задача 8. Правильный пятиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной a (рис. 40). Найдите площадь поверхности тела вращения и его объем.

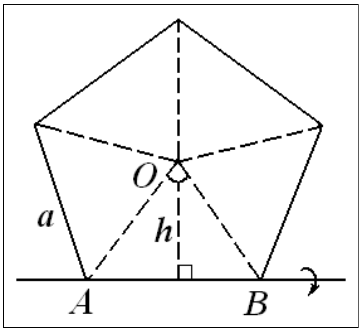


Рис. 40

Решение

В треугольнике АОВ угол при вершине равен 72^0.

Высота треугольника АОВ $h = \frac{a}{2}\cdot ctg36^0 = \frac{a}{2}\cdot\frac{\cos 36^0}{2\sin 18^0 \cos 18^0}$ есть расстояние от центра тяжести до оси.

Зная, что $\cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ и $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ [3], после преобразований получаем:

$$h = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

Таким образом, площадь поверхности тела вращения:

$$F = 5\pi\cdot a^2 ctg36^0 = 5\pi\cdot a^2\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}},$$

а объем тела вращения равен:

$$V = \frac{5\pi}{4}\cdot a^3 ctg^2 36^0 = \frac{5\pi}{4}\cdot a^3\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

На примере этой и предыдущей задач можно наглядно видеть очевидную экономию времени, которую дает применение этих теорем.

Задача 9. Определите ординату центра тяжести пластинки, ограниченной линиями $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ и осью абсцисс.

Решение

Имеем:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2,$$

объем тела вращения вокруг оси абсцисс:

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ордината центра тяжести пластинки $y_c = \frac{\pi}{8}$.

Задача 10. Определить координаты центра тяжести пластинки, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

Решение

Найдем площадь пластинки и объем тела вращения вокруг оси абсцисс. Имеем:

$$S = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{14}{3} \text{ и } V = \pi \int_1^4 x dx = \frac{15\pi}{2}.$$

Таким образом, получаем ординату центра тяжести пластинки $y_c = \frac{45}{56}$.

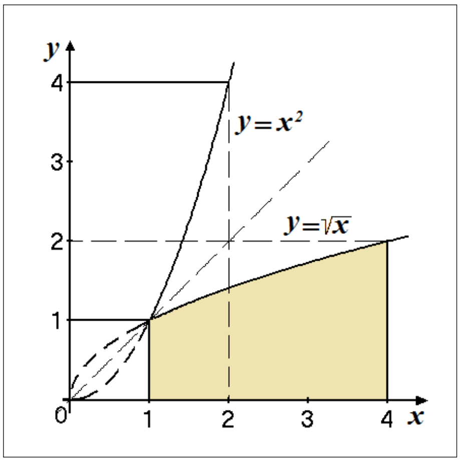


Рис. 41

Для нахождения абсциссы рассмотрим вращение вокруг оси OX пластинки, ограниченной графиком обратной функции. В этом случае объем тела вращения находим, вычитая из объема большого цилиндра объем малого цилиндра и объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$:

$$V = 32\pi - \pi - \pi \int_1^2 x^4 dx = \frac{124\pi}{5}.$$

Таким образом, получаем абсциссу центра тяжести пластинки:

$$x_c = \frac{93}{35} = 2\frac{23}{35}.$$

Количество задач на применение теорем Паппа — Гюльдена можно увеличить в несколько раз. Думается, что эти задачи школьного уровня должны быть представлены по меньшей мере в классах физико-математического профиля, а число часов на применение интеграла в физике и геометрии вместо 1—2 должно быть увеличено до 4—6.

Составители ЕГЭ должны на деле руководствоваться кодификатором элементов содержания по математике, чтобы данная тема заняла достойное место в заданиях ЕГЭ.

Литература

1. *Киселев, А. П.* Геометрия. 10—11 классы / А. П. Киселев, Н. А. Рыбкин. — М. : Дрофа, 1995. — 224 с.

2. *Кущенко, В. С.* Сборник конкурсных задач по математике / В. С. Кущенко. — Л. : Судпромгиз, 1960. — 374 с.

3. *Малышев, И. Г.* О важности тригонометрии как раздела геометрии / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2010. — № 8. — С. 52—54.

4. *Малышев, И. Г.* Теоремы Паппа — Гюльдена / И. Г. Малышев // Математика в школе. — 2015. — № 4. — С. 48—54.

Заключение

Представленное учебно-методическое пособие «Практико-ориентированные задания в школьном курсе математики» посвящено практическим математическим задачам. Качество образования начало резко снижаться в 70-х годах прошлого века вследствие увлечения наукообразной математикой, оторванной от реальной практики, когда больше всего пострадала школьная геометрия. Перед вами высказывание современных авторов: «Принципиальное отличие математики от всех других областей человеческого знания, за исключением разве что философии, — работа разума с абсолютными объектами, не связанными с материальным миром. Ни один аспект математики не описывает реальные процессы, оставаясь чистым порождением интеллекта, и именно поэтому столь успешно применение математического аппарата для описания моделей этих процессов» [1].

В далеких 1930-х годах несколько молодых амбициозных французских математиков образовали группу под псевдонимом «Николя Бурбаки». В основе их работ лежала выдвинутая ими идея строго аксиоматического изложения математики на основе теории множеств. Спустя годы эти новаторы посчитали, что реформированная по предложенным ими лекалам школьная математика станет легкой и доступной.

Расцвет группы пришелся на 1950—1960-е годы. Влияние Бурбаки было особенно ощутимо во Франции, Бельгии, Швейцарии, Италии, США. Вот мнение Л. Шварца, одного из самых заметных математиков этой группы: «Математика является в высшей степени абстрактной наукой и в то же время наукой в высшей степени независимой от внешнего мира и текущей жизни, так что практически оказывается почти невозможным говорить нематематикам о современной математике» [3].

Высказывание достаточно симптоматично и явно перекликается с предыдущим мнением, хотя разделяют их более чем полвека.

Если руководствоваться подобными тезисами, то многим выдающимся и даже великим математикам следует отказать в этом звании как занимавшимся оторванной от внешнего мира наукой. Причем это известные ученые, которые, решая практические задачи, открывали новые горизонты в математике.

Среди них основоположники целых математических направлений: механики — Архимед, Кардано, Жуковский, Чаплыгин; астрономы — Птолемей, Коперник, Лаплас, художник Дюрер, гидравлик Бомбелли, землемер Вессель; физики — Ньютон, Гюйгенс, Пуассон, Максвелл, Дирак, Зоммерфельд, Стокс; инженеры — Хевисайд и Чева, военный инженер и генерал Карно, физиолог и физик Гельмгольц, геолог Федоров.

В СССР к Бурбаки до поры до времени относились скептически. Более того, в 1960 году в журнале «Математика в школе» была опубликована великолепная статья [3], которую следует почитать многим современным математикам.

Польский математик Гуго Штейнгауз в большой статье «О математической строгости» подробно разбирает тезисы Л. Шварца и делает вывод: «Этот светский орден с достойной изумления выдержкой и последовательностью в течение многих лет укладывает кирпич за кирпичом под здание современной математики… эта фраза не стилистическая оплошность: здание стоит, а под него кладут фундамент; ...не сомневаюсь, что г. Бурбаки доживет до того времени, когда его книги проникнут под крыши даже самых маленьких математических хижин...» [3].

В СССР этот момент начала замены «фундамента», или начала снижения качества знаний, четко зафиксирован — это 1956 год, когда из школьной программы без всяких объяснений исключили учебники А. П. Киселева. Далее последовало перманентное снижение качества. И уже в результате реформы 1970—1978 годов оно обвалилось катастрофически. Г. Штейнгауз предупреждал, но к нему не прислушались.

Опять же журнал «Математика в школе» в разгар реформы печатает статью Р. Тома [2] с серьезной критикой последователей Бурбаки, после которой реформаторы должны были тут же свернуть свою деятельность. Однако этого не случилось.

В наше время мы слышим множество самых разных мнений, среди которых звучат и мнения адептов строгости. Именно поэтому подобные издания в настоящее время и актуальны, хотя, внося практико-ориентированные задания в процесс обучения, не нужно изменять чувству меры. Именно это мы наблюдали последние несколько лет, когда в экзаменационный материал для 9-го класса входил раздел «Реальная математика». Хотя то, что это искусственное разделение школьной математики на три раздела, было понятно с самого начала.

Литература

1. *Буфеев, С. В.* Математические задачи или практические вопросы? / С. В. Буфеев, И. С. Буфеев // Математика в школе. — 2013. — № 8. — С. 46—48.

2. *Том, Р*. Современная математика — существует ли она? / Р. Том // Математика в школе. — 1973. — № 1. — С. 27—35.

3. *Штейнгауз, Г.* О математической строгости / Г. Штейнгауз // Математика в школе. — 1960. — № 1. — С. 54—50.

Литература

1. *Боковнев, О. А.* Методика изучения основных тем программы по геометрии в средних ПТУ : методическое пособие / О. А. Боковнев, В. И. Колобов. — М. : Высшая школа, 1986. — 64 с.

2. *Варданян, С. С.* Задачи по планиметрии с практическим содержанием : книга для учащихся 6—8 классов средней школы / С. С. Варданян ; под ред. В. А. Гусева. — М. : Просвещение, 1989. — 144 с.

3. *Колягин, Ю. М.* Реформа и контрреформа / Ю. М. Колягин // Математика в школе. — 2012. — № 6. — С. 68—73.

4. *Крылов, А. Н.* Прикладная математика и ее значение для техники / А. Н. Крылов. — М. : Гос. научно-техн. изд-во, 1931. — 16 с.

5. *Петров, В. А.* Математика. 5—11 классы. Прикладные задачи : учебно-методическое пособие / В. А. Петров. — М. : Дрофа, 2010. — 252 с.

6. *Терешин, Н. А.* Прикладная направленность школьного курса математики : книга для учителя / Н. А. Терешин. — М. : Просвещение, 1990. — 96 с.

7. *Фоминых, Ю. Ф.* Прикладные задачи по алгебре для 7—9 классов : книга для учителя / Ю. Ф. Фоминых. — М. : Просвещение, 1999. — 112 с.

Содержание

Учебное издание

Малышев Игорь Геннадьевич
Мичасова Милена Альбертовна

Практико-ориентированные задания в школьном курсе математики

Учебно-методическое пособие

Редактор **С. И. Бодриков**
Корректор **В. А. Буренкова**
Компьютерная верстка **Т. С. Родинко**

Оригинал-макет подписан в печать 05.03.2018 г.
Формат 60 × 84 $^1/_8$. Бумага офсетная. Гарнитура «Times».
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 6,97. Тираж 100 экз. Заказ 2445.

ГБОУ ДПО «Нижегородский институт развития образования»
603122, Н. Новгород, ул. Ванеева, 203.
www.niro.nnov.ru

Отпечатано в издательском центре учебной
и учебно-методической литературы ГБОУ ДПО НИРО

И. Г. Малышев, М. А. Мичасова

Практико-ориентированные задания в школьном курсе математики

Учебно-методическое пособие

НИРО
НИЖЕГОРОДСКИЙ
ИНСТИТУТ
РАЗВИТИЯ
ОБРАЗОВАНИЯ